

**Łukasz Kuźmiński\***

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

## ROZKŁADY WARTOŚCI EKSTREMALNYCH W ANALIZIE ZAGROŻENIA HYDROLOGICZNEGO NA DOLNYM ŚLĄSKU

### STRESZCZENIE

Artykuł poświęcono szacowaniu ryzyka zagrożenia powodziowego na wybranych rzekach Dolnego Śląsku. Na podstawie empirycznych danych dotyczących dziennych stanów wód z trzech stacji hydrologicznych na rzekach Odra, Nysa Kłodzka i Nysa Łużycka zilustrowano empiryczne dystrybuanty kwartalnych maksimów stanów wód. Do dystrybuant empirycznych dopasowano dystrybuanty teoretyczne i na ich podstawie obliczono ryzyko wystąpienia zagrożeń powodziowych.

**Słowa kluczowe:** rozkład Gumbella, rozkłady maksimów, ryzyko zagrożenia powodziowego, prognoza probabilistyczna, dziedzina przyciągania, stan alarmowy i ostrzegawczy, stan wody.

### Wprowadzenie

Jest to kolejna praca poświęcona badaniom nad ryzykiem zagrożenia powodziowego na Dolnym Śląsku z zastosowaniem teorii wartości ekstremalnych. Wartości ekstremalne z uwagi na swój istotny – w większości przypadków negatywny – wpływ na wiele dziedzin życia są tematem zainteresowań naukowców, badaczy

---

\* Adres e-mail: lukasz.kuzminski@ue.wroc.pl.

oraz praktyków z wielu dyscyplin od długiego czasu. W artykule zajęto się badaniem rozkładów ekstremalnych charakterystyk w hydrologii. Analizowanymi charakterystykami są stany wód na trzech wybranych rzekach na Dolnym Śląsku, a mianowicie na Odrze w Oławie, na Nysie Kłodzkiej w Bystrzycy Kłodzkiej oraz na Nysie Łużyckiej w Zgorzelcu.

Celem jest oszacowanie ryzyka zagrożenia powodziowego na wymienionych rzekach i porównanie go. Najpierw należy przedstawić wybrane elementy teorii wartości ekstremalnych, które wykorzystano do realizacji celu pracy. Następnie na podstawie danych empirycznych dotyczących dziennych stanów wód na analizowanych rzekach pochodzących z Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej zilustrowano empiryczne rozkłady kwartalnych maksimów stanów i dopasowano do nich rozkłady teoretyczne. Teoretyczne rozkłady maksimów kwartalnych dobrano za pomocą metod graficznych, a wyniki zweryfikowano odpowiednimi testami zgodności. Najlepiej dopasowane teoretyczne dystrybuanty kwartalnych rozkładów maksimów posłużyły do obliczenia ryzyka zagrożenia powodziowego w analizowanych miejscach.

## 1. Rozkłady wartości ekstremalnych – wybrane pojęcia i twierdzenia

Najpierw należy przedstawić wybrane pojęcia i twierdzenia z dziedziny rozkładów wartości ekstremalnych niezbędne do realizacji celu. Przez  $X_1, X_2, \dots$  oznaczono ciąg niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach lub, inaczej mówiąc, mających wspólną dystrybuantę  $F(x)$ .

Przez  $M_n$  oznaczono zmienną losową będącą  $n$ -tą statystyką pozycyjną w  $n$ -elementowej próbie losowej [Magiera, 2002], czyli

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

Dystrybuantę zmiennej losowej  $M_n$  można w prosty sposób przedstawić za pomocą następującego wzoru,

$$P\{M_n \leq x\} = P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x\} = F^n(x) \quad (2)$$

gdzie  $F(x)$  – dystrybuanta zmiennych  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) [David, 2003, s. 9].

W teorii asymptotycznych rozkładów dla ekstremów istotne jest to, że niezdegenerowana dystrybuanta zmiennej losowej  $M_n$  musi należeć to jednej z trzech możliwych ogólnych rodzin dystrybuant granicznych. Postacie tych dystrybuant wraz z ich alternatywnymi oznaczeniami podano w dalszej części. W zastosowaniach tej teorii jedną z najważniejszych spraw dla badacza jest możliwie szczegółowe poznanie natury dystrybuanty  $F(x)$  badanego ciągu zmiennych losowych. Potrzebne jest to do ustalenia, do której z trzech możliwych dziedzin przyciągania [Rootzen, 1983] dystrybuant granicznych ona należy. Właściwie jest to determinowane przez zachowanie się ogona dystrybuanty  $F(x)$  dla dużych wartości  $x$ . Ogon dystrybuanty definiowany jest następująco:  $\tilde{F}(x) = 1 - F(x)$ .

Zbieżność według rozkładu [Magiera, 2002, s. 100] dystrybuanty zmiennej  $M_n$  po odpowiednim znormalizowaniu przez stałe  $a_n > 0$  i  $b_n$  do pewnej dystrybuanty granicznej  $G(x)$  przedstawia wyrażenie,

$$P\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} \xrightarrow{w} G(x) \tag{3}$$

gdzie  $\xrightarrow{w}$  – zbieżność pojawia się w ciągłych punktach  $G$ .

Praktyczne zastosowanie wymaga wiedzy na temat, jakie dystrybuanty mogą znaleźć się po prawej stronie wyrażenia (3). W twierdzeniu (1) podano trzy rodzaje dystrybuant granicznych dla ekstremów, które mogą znaleźć się po prawej stronie wyrażenia (3) wraz z ich alternatywnymi oznaczeniami stosowanymi w literaturze przedmiotu.

**Twierdzenie 1.** (*ang. Extremal Types Theorem*) [Leadbetter, 1983]. Niech  $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , gdzie  $X_i$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach. Jeśli dla pewnych stałych  $a_n > 0$  i  $b_n$  zachodzi zbieżność (3) dla niezdegenerowanej dystrybuanty  $G$ , to  $G$  ma jedną z trzech postaci:

$$\begin{aligned} \text{Gumbel (EV0 lub Typ I):} \quad & G_I(x) = \exp\left(-e^{-x}\right), \quad -\infty < x < \infty \\ \text{Frechet (EV1 lub Typ II):} \quad & G_{II}(x) = \exp\left(-x^{-\alpha}\right), \quad \text{dla pewnego } \alpha > 0, \quad x > 0 \\ \text{Weibull (EV2 lub Typ III):} \quad & G_{III}(x) = \exp\left(-(-x)^\alpha\right), \quad \text{dla pewnego } \alpha > 0, \quad x \leq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Funkcje gęstości dla podanych w twierdzeniu (1) dystrybuant można znaleźć w pracy [Thomas, 2007].

W kontekście zastosowań bardzo ważną własnością jest to, że jeżeli ciąg niezależnych zmiennych losowych ma wspólną dystrybuantę, która jest jedną z trzech wymienionych w twierdzeniu 1, to ona sama dla siebie jest dystrybuantą graniczną dla ekstremum [Leadbetter, 1983].

Rozszerzając rodzinę dystrybuant granicznych dla ekstremów wyszczególnioną w zależnościach (4), można wprowadzić parametryzację tych równań. Parametryzacja polega na dodaniu parametru położenia  $\mu$  i skali  $\sigma$  do wzorów dystrybuant. Twierdzenie 2, pozwala na takie przekształcenie dystrybuant.

**Twierdzenie 2.** Jeśli zmienna losowa  $X$  ma dystrybuantę  $F$ , to zmienna losowa  $(\mu + \sigma X)$  ma dystrybuantę  $F_{\mu,\sigma}(x) = F((x - \mu) / \sigma)$  [Thomas, 2007, s. 16].

Na mocy tego twierdzenia dystrybuanty dane w zależnościach (4) po parametryzacji mają postać:

$$G_{0,\mu,\sigma}(x) = \exp\left(-e^{-(x-\mu)/\sigma}\right)$$

$$G_{i,\alpha,\mu,\sigma}(x) = G_{i,\alpha}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

Parametryzacja ta znacznie rozszerza spektrum możliwości, jeżeli chodzi o modelowanie rozkładów ekstremów różnych charakterystyk. Wykorzystując parametryzowane dystrybuanty, można z bardzo dużą dokładnością dopasować dystrybuantę teoretyczną do dystrybuanty empirycznej ekstremum badanej zmiennej losowej.

Na koniec, wyczerpując temat rodziny dystrybuant granicznych dla ekstremów, wszystkie dystrybuanty ze wzoru (5) mogą być przedstawione jako członkowie jednej rodziny uogólnionych rozkładów z następującą dystrybuantą:

$$G_{\gamma}(x) = \exp\left(-\left(1 + \gamma\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right), \quad 1 + \gamma\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0, \quad \sigma > 0 \quad (6)$$

Po zastosowaniu dobrze znanego wzoru

$$\left(1 + \gamma \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rightarrow \exp\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{jak } \gamma \rightarrow 0$$

otrzymuje się, że  $G_\gamma(x) \rightarrow G_{0,\mu,\sigma}(x)$ ,  $\gamma \rightarrow 0$  (por. [Kotz, 2005; Thomas, 2007]).

Dotychczas analizowany przypadek z ciągiem niezależnych zmiennych losowych jest zdecydowanie rzadziej spotykany, niż gdy zmienne losowe w ciągu są w pewien sposób od siebie zależne. Rezygnujemy z założenia o niezależności, ale w dalszym ciągu utrzymujemy założenie, że ciąg  $\{X_n\}$  ma wspólny rozkład. Rozważane ciągi są ciągami stacjonarnymi, czyli ciągi są takie, że rozkłady  $(X_{j_1}, \dots, X_{j_n})$  i  $(X_{j_1+m}, \dots, X_{j_n+m})$  są identyczne dla pewnego wyboru  $n, j_1, \dots, j_n$  i  $m$ . Zakładamy dodatkowo, że zależność między  $X_i$  i  $X_j$  maleje w pewien określony sposób dla różnych ciągów zmiennych, gdy rośnie  $|i - j|$ . Taką zależność można określić mianem „gasnącej”. Najprostszym przykładem tego typu ograniczenia jest  $m$ -zależność zgodnie, z którą  $X_i$  i  $X_j$  są faktycznie niezależne, jeśli  $|i - j| > m$ . Z uwagi na ograniczone ramy artykułu nie poświęcono więcej uwagi tematowi warunków zależności w ciągach zmiennych losowych. Więcej na ten temat można znaleźć w pracach [Czekała, 2001; Kuźmiński 2013].

## 2. Podstawowe pojęcia hydrologiczne

Na potrzeby realizacji celu tego artykułu należy przedstawić podstawowe zagadnienia związane z hydrologią. Na wstępie wprowadzimy pojęcie prognozy ostrzegawczej, jako zapowiedzi wystąpienia zdarzenia uznanego przez odbiorcę za niekorzystne. Prognozę ostrzegawczą precyzyjniej określono definicją 1, która jest jedną z wielu, jakie można spotkać w literaturze przedmiotu, ale najbardziej pasuje do problematyki niniejszego opracowania.

**Definicja 1. Prognozą ostrzegawczą** jest stan zmiennej w momencie lub okresie należącej do przyszłości, gdy przewiduje się niekorzystne kształtowanie się kontrolowanej zmiennej na podstawie informacji dostarczonej przez szereg czasowy [Siedlecka, 1996].

Zadaniem prognozy ostrzegawczej jest dostarczenie na czas informacji o wystąpieniu w przyszłości niekorzystnej wartości monitorowanej charakterystyki. Jak z tego

wynika, prognozy ostrzegawcze to specyficzny rodzaj przewidywania, nie dotyczą one bowiem wyznaczania przyszłej wartości monitorowanej zmiennej, lecz tylko faktu, że wartość monitorowanej zmiennej przekroczy wyznaczony poziom lub będzie niższa od danego poziomu w zależności od charakteru badanego zjawiska.

Ponieważ w prezentowanym podejściu do prognozowania ostrzegawczego, w którym wykorzystuje się rozkłady wartości ekstremalnych obserwowanych zmiennych, prognozą jest prawdopodobieństwo, wprowadzono definicję **prognozy ostrzegawczej probabilistycznej**.

**Definicja 2. Prognoza ostrzegawcza probabilistyczna** jest prawdopodobieństwem przekroczenia (od dołu lub od góry) określonej krytycznej wartości monitorowanej zmiennej. Prawdopodobieństwo to uzyskiwane jest z ustalonego podczas badań rozkładu wartości ekstremalnych monitorowanej zmiennej.

Prognoza ta będzie odgrywać rolę miary ryzyka w analizie ryzyka zagrożenia powodziowego dla badanych rzek.

Ograniczając szerokie zastosowanie prognoz ostrzegawczych jedynie do dziedziny hydrologii, należy również ograniczyć zbiór zmiennych kontrolowanych w procesie prognozowania ostrzegawczego. W monitoringu i prognozowaniu ostrzegawczym na potrzeby hydrologiczne badaniu poddaje się takie charakterystyki, jak stan wody, przepływ, termin wystąpienia fali kulminacyjnej, całkowita objętość fali powodziowej oraz prędkość przemieszczania się fali powodziowej [Szturc, 1995; Ozga-Zielińska, 1997].

W artykule analizowane są stany wód, które zdefiniowano poniżej.

**Definicja 3. Stan wody** jest to wzniesienie zwierciadła wody w cieku ponad umowny poziom odniesienia (co nie jest jednoznaczne z głębokością cieku). Należy rozróżnić pojęcia stan wody i poziom wody. Są to te same wielkości fizyczne, jednak podawane względem różnych odniesień. Poziomy terenu liczymy od przyjętego poziomu morza, dlatego wysokość, na której znajdują się obiekty na Ziemi, wyrażamy w metrach nad poziomem morza. W Polsce sieć wodowskazowa odniesiona jest obecnie do poziomu morza w Kronsztadzie w Rosji. Dla uproszczenia zapisu wzniesienie zwierciadła wody liczymy od ustalonego zera wodowskazu. Taki pomiar nazywany jest stanem wody, w odróżnieniu od poziomów liczonych względem przyjętego zera niwelacji.

Na podstawie wieloletnich pomiarów można określić charakterystyczny rozkład stanów wody dla danej rzeki w danym miejscu. Wyznacza się wówczas następujące strefy stanów wody: strefę niskich stanów, strefę stanów średnich, strefę stanów wysokich, stan ostrzegawczy i stan alarmowy. W kontekście porównania ryzyka wystąpienia zagrożenia powodziowego szczególnie interesować nas będą dwa ostatnie spośród wymienionych.

### 3. Aproksymacja rozkładów maksimów stanów wód

Poszukujemy teoretycznych dystrybucji z rodziny danej wzorem (5), które najlepiej pasują do empirycznych rozkładów maksimów kwartalnych stanów wód na badanych rzekach. Procedura poszukiwania najlepiej dopasowanego funkcjonu z rodziny (5) lub funkcji gęstości rozkładu normalnego opisze empiryczny rozkład wartości maksymalnych, jest głównie oparta na metodach graficznych. Do tego celu wykorzystano narzędzia służące do prezentacji graficznej rozkładów empirycznych, takie jak dystrybucja empiryczna oraz jądro gęstości prawdopodobieństw (*ang. kernel densities*). Wykres dystrybucji empirycznej jest graficznym narzędziem powszechnie znanym i opisanym następującym wzorem:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i \leq n} I(x_i \leq x) \quad (7)$$

gdzie indykator  $I(x_i \leq x) = 1$ , gdy  $y \leq x$ , 0 – w pozostałych przypadkach.

Drugie narzędzie do wizualizacji empirycznych rozkładów jest, mówiąc w dużym skrócie, bardzo precyzyjną formą histogramu rozkładu empirycznego, lub, inaczej mówiąc, empiryczną funkcją gęstości prawdopodobieństwa określonego rozkładu. Empiryczna funkcja jądra gęstości prawdopodobieństwa opisana jest wzorem:

$$f_{n,b}(x) = \frac{1}{nb} \sum_{i \leq n} k\left(\frac{x - x_i}{b}\right) \quad (8)$$

gdzie:

- $k$  – funkcja (jądro), taka że  $\int k(y)dy = 1$ ,
- $b > 0$  – wybrana szerokość pasma.

Funkcjonał  $k$  ma określonych kilka form, które są wykorzystywane. Z uwagi na ograniczone ramy artykułu bardziej zainteresowanych tym narzędziem odsyłamy do literatury [Thomas, 2007].

Badaniu poddano dzienne stany wód na rzekach Dolnego Śląska uzyskane z wybranych powierzchniowych stacji pomiarowych w określonych okresach:

- a) stacja w Bystrzycy Kłodzkiej na rzece Nysa Kłodzka, 11 322 dziennych obserwacji od 1 stycznia 1981 roku do 31 grudnia 2011 roku;
- b) stacja na moście w Oławie na rzece Odra, 18 627 dziennych obserwacji, od 1 stycznia 1961 roku do 31 grudnia 2011 roku;
- c) stacja w Zgorzelcu na rzece Nysa Łużycka, 10 957 dziennych, od 1 stycznia 1982 roku do 31 grudnia 2011 roku.

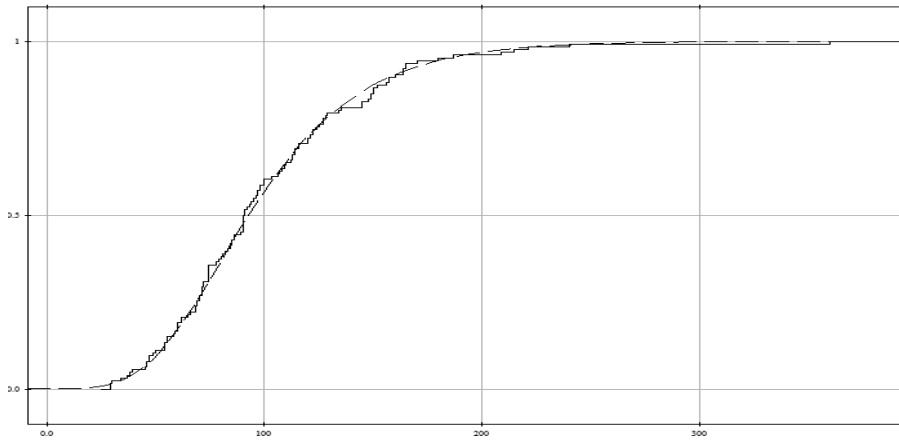
Na podstawie tych danych stworzono próby maksimów kwartalnych dla każdej z rozpatrywanych rzek. Dla poszczególnych przypadków otrzymano następujące liczebności empirycznych kwartalnych maksimów stanów wód: rzeka Nysa Kłodzka:  $n_1 = 126$ , rzeka Odra:  $n_2 = 206$ , rzeka Nysa Łużycka:  $n_3 = 121$ .

Dla wszystkich wymienionych prób maksimów przeprowadzono procedurę dopasowania odpowiedniej teoretycznej dystrybuanty dla rozkładów ekstremów z rodziny danej wzorem (5) lub dystrybuanty rozkładu normalnego. Na każdym przedstawionym na rysunkach 1–3 wykresie, przedstawiającym dystrybuantę empiryczną kwartalnych maksimów, sporządzono wykres najlepiej dopasowanej teoretycznej dystrybuanty. Wykresy teoretycznych parametryzowanych dystrybuant wraz z odpowiednimi funkcjami gęstości prawdopodobieństwa dobrano za pomocą oprogramowania Xtremes.

Na wszystkich wykresach dopasowanie empirycznych dystrybuant do dobrych funkcji teoretycznych jest prawie idealne. W przypadku kwartalnych maksymalnych stanów wód na rzekach Nysa Kłodzka i Nysa Łużycka najlepiej dopasowaną dystrybuantą, która opisuje te rozkłady, jest dystrybuanta rozkładu Gumbela z rodziny opisanej wzorem (5) z odpowiednimi wartościami parametrów położenia i skali. Dla tej samej charakterystyki na rzece Odra najlepiej dopasowana okazała się dystrybuanta rozkładu normalnego.

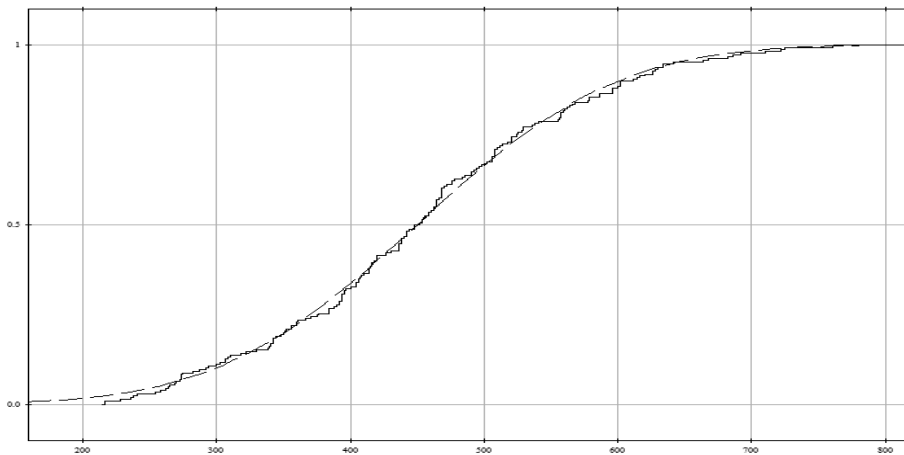


Rysunek 1. Dystrybuanta empiryczna dla rzeki Nysa Kłodzka – linia ciągła, oraz teoretyczna dystrybuanta rozkładu Gumbela z parametrami  $\mu = 80$  i  $\sigma = 35$  – linia przerywana



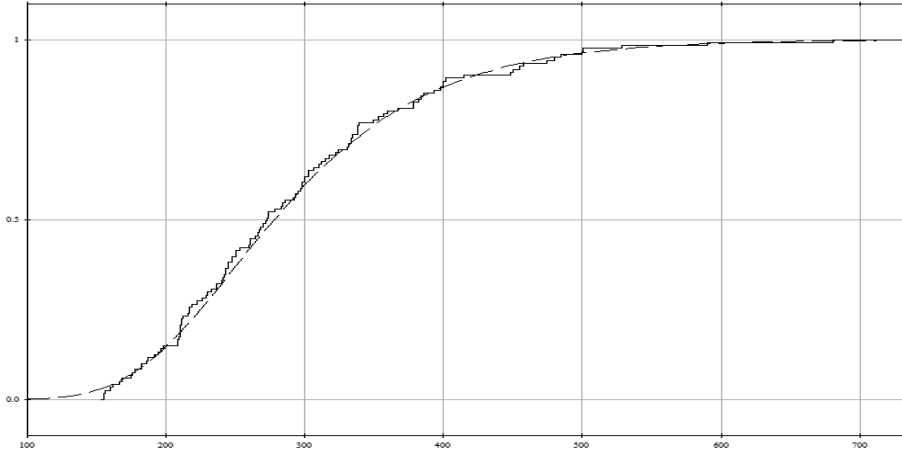
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2. Dystrybuanta empiryczna dla maksimów kwartalnych dla rzeki Odra – linia ciągła, oraz teoretyczna dystrybuanta rozkładu Normalnego z parametrami  $\mu = 450$  i  $\sigma = 118$  – linia przerywana



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3. Dystrybuanta empiryczna dla maksimów kwartalnych dla rzeki Nysa Łużycka – linia ciągła, oraz teoretyczna dystrybuanta rozkładu Gumbela z parametrami  $\mu = 250$  i  $\sigma = 77$  – linia przerywana



Źródło: opracowanie własne.

Dystrybuanty empiryczne wykreślono na podstawie wzoru (7), natomiast empiryczne funkcje gęstości prawdopodobieństwa – na podstawie wzoru (8). Empiryczne funkcje gęstości prawdopodobieństwa dla trzech badanych przypadków wykreślono dla funkcjonału  $k(x) = 0,75(1 - x^2)I(-1 \leq x \leq 1)$ . Parametr  $b$  we wzorze (8) w analizowanych przypadkach wyniósł: dla danych z Nisy Kłodzkiej – 87,12, dla Odry – 84,14 i dla Nisy Łużyckiej – 120,00.

Mimo że zastosowanie narzędzi graficznych dało bardzo dobre wyniki, to potwierdzono je odpowiednimi statystycznymi testami zgodności. Po zastosowaniu testu ilorazu wiarygodności dla rozkładu Gumbela [Thomas, 2007] otrzymano dla danych pochodzących z Nisy Kłodzkiej i Nisy Łużckiej wartość  $p$  – value [Magiera, 2002] na poziomie odpowiednio 0,298 dla pierwszej rzeki i 0,312 dla rzeki drugiej. Wynik ten potwierdza zgodność rozkładów empirycznego z dopasowanymi metodą graficzną rozkładami teoretycznymi Gumbela z odpowiednimi parametrami. Podobnie jest dla danych pochodzących z rzeki Odra. W tych przypadkach po przeprowadzeniu testu zgodności Kołmogorowa-Lilieforsa [Magiera, 2002] otrzymano wartość  $p$  – value na poziomie 0,678. W tym przypadku wyniki testu pokazują również, że dopasowanie odpowiedniego rozkładu normalnego do empirycznych

danych jest bardzo dobre. Na uwagę zasługuje fakt, że zaproponowane narzędzia służące do graficznej prezentacji rozkładów empirycznych oraz dopasowywanie najlepiej odpowiadających im rozkładów teoretycznych są bardzo efektywne.

#### 4. Porównanie ryzyka zagrożenia hydrologicznego na badanych rzekach

Dopasowane teoretyczne dystrybuanty kwartalnych maksimów dla danych z rozpatrywanych rzek wykorzystano do obliczenia ryzyka zagrożenia powodziowego. Za miarę ryzyka powodziowego przyjęto prawdopodobieństwo przekroczenia poziomu stanu ostrzegawczego i alarmowego przez maksymalne wartości dziennych stanów wód z 90 dni. W tabeli 1 podano wartości stanów ostrzegawczych i alarmowych dla badanych rzek.

Tabela 1. Stany ostrzegawcze i alarmowe

Stacja	Stan ostrzegawczy (cm)	Stan alarmowy (cm)
Nysa Kłodzka–Bystrzyca Kłodzka	110	180
Odra–Oława	500	560
Nysa Łużycka–Zgorzelec	340	400

Źródło: opracowanie własne.

Prawdopodobieństwa, które będą pełnić funkcję miar ryzyka zagrożeń hydrologicznych, obliczono z następujących wzorów:

$$P(M_{90} > x_{SO}) = 1 - F_{MAX}(x_{SO}), \quad P(M_{90} > x_{SA}) = 1 - F_{MAX}(x_{SA}) \quad (9)$$

gdzie:

$M_{90} = \max(x_1, x_2, \dots, x_{90})$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_{90}$  – dzienne stany wód obserwowane podczas 90 dni,

$x_{SO}$ ,  $x_{SA}$  – odpowiednio wartość stanu ostrzegawczego i alarmowego dla badanych rzek,

$F_{MAX}(x)$  – dystrybuanta maksimów kwartalnych.

W zależności od tego, która z rzek jest rozpatrywana, funkcja  $F_{MAX}(x)$  ma następujące formy:

$$a) F_{MAX}(x) = G_{0,80,35}(x) = \exp\left(-e^{-(x-80)/35}\right) \text{ dla rzeki Nysa Kłodzka;}$$

$$b) F_{MAX}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{118\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{u-450}{236}\right)^2} du \text{ dla rzeki Odra;}$$

$$c) F_{MAX}(x) = \exp\left(-e^{-(x-250)/77}\right) \text{ dla rzeki Nysa Łużycka.}$$

Dystrybuanta kwartalnych maksimów dla rzek Nysa Kłodzka i Nysa Łużycka jest funkcją Gumbela z odpowiednimi parametrami (zob. wzór (5)). Dystrybuanta rozkładu maksimów kwartalnych na rzece Odra jest dystrybuantą rozkładu normalnego z odpowiednio dobranymi parametrami.

W tabeli 2 obliczono prawdopodobieństwo przekroczenia stanu ostrzegawczego i alarmowego dla każdej z badanych rzek, które będą pełniły funkcję miary ryzyka do porównania stopnia zagrożenia powodziowego dla badanych obszarów.

Tabela 2. Prawdopodobieństwa przekroczenia stanów ostrzegawczych i alarmowych

Stacja	Ryzyko – stan ostrzegawczy	Ryzyko stan alarmowy
Nysa Kłodzka–Bystrzyca Kłodzka	$P(M_{90} > 110) = 0,3458$	$P(M_{90} > 180) = 0,0558$
Odra–Oława	$P(M_{90} > 500) = 0,3361$	$P(M_{90} > 560) = 0,1757$
Nysa Łużycka–Zgorzelec	$P(M_{90} > 340) = 0,2671$	$P(M_{90} > 400) = 0,1329$

Źródło: opracowanie własne.

Poddając analizie otrzymane wyniki, można zauważyć, że największe zagrożenie powodziowe występuje na rzece Odra – tam jest największe ryzyko przekroczenia stanu alarmowego przez maksimum kwartalne. Najmniejsze ryzyko przekroczenia stanu alarmowego przez badaną charakterystykę występuje na rzece Nysa Kłodzka, lecz rzeka ta cechuje się największym ryzykiem przekroczenia stanu ostrzegawczego. Nysa Łużycka w porównaniu z pozostałymi rzekami charakteryzuje

je się najmniejszym ryzykiem przekroczenia stanu ostrzegawczego i zajmuje drugie miejsce pod kątem ryzyka przekroczenia stanu alarmowego.

## Podsumowanie

W artykule przedstawiono metodę porównania ryzyka powodziowego na trzech wybranych rzekach Dolnego Śląska. Prezentowana metoda jest oparta na modelowaniu rozkładu prawdopodobieństwa maksymalnych wartości dziennych stanów wód w założonym horyzoncie czasowym. Wykorzystano w niej wybrane elementy teorii rozkładów wartości ekstremalnych, a ponadto metody graficznego dopasowania teoretycznych funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz dystrybuant do ich empirycznych odpowiedników wykreślonych na podstawie rzeczywistych danych pochodzących z Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej w Warszawie.

Za miarę ryzyka wystąpienia zagrożenia powodziowego na badanych rzekach przyjęto prawdopodobieństwo przekroczenia stanów ostrzegawczych i alarmowych przez badane charakterystyki. Prawdopodobieństwa obliczono z teoretycznych dystrybuant rozkładów maksimów kwartalnych, które aproksymowały rozkłady empiryczne. Na uwagę zasługuje dość ciekawy fakt wynikający z badań, a mianowicie, że najlepiej dopasowaną dystrybuantą do empirycznych maksimów kwartalnych na rzece Odra okazała się powszechnie znana i stosowana dystrybuanta rozkładu normalnego.

Po obliczeniu niezbędnych prawdopodobieństw procedura porównania zagrożeń powodziowych na badanych rzekach była bardzo prosta.

Metody przedstawione w artykule mogą znaleźć zastosowanie w dziedzinie ubezpieczeń, w instytucjach zajmujących się ochroną i zabezpieczeniem przeciwpowodziowym, a ponadto być merytorycznym wsparciem przy rozdziale regionalnym środków finansowych na działania zabezpieczające zagrożone tereny przed katastrofami hydrologicznymi.

## Literatura

- Cieślak M. (2002), *Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Czekała M. (2001), *Statystyki pozycyjne w modelowaniu ekonometrycznym. Wybrane problemy*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław.

- Galambos (1978), *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, Wiley, New York.
- Kotz S. N. (2005), *Extreme Value Distributions. Theory and Applications*, Imperial College Press, London.
- Kuźmiński Ł. (2013), *Graniczne dystrybuanty wartości ekstremalnych dla zależnych ciągów zmiennych losowych. Ekonometria* (w druku).
- Kuźmiński Ł. (2012a), *Prognozowanie ostrzegawcze*, Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wrocław.
- Kuźmiński Ł. (2012b), *Statystyki pozycyjne w prognozach ostrzegawczych. Zastosowanie metod ilościowych w ekonomii i zarządzaniu*, CeDeWu, Warszawa.
- Ozga-Zielińska M. (1997), *Hydrologia stosowana*, PWN, Warszawa.
- Magiera R. (2002), *Modele i metody statystyki matematycznej*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław.
- Nagaraja H.D. (2003), *Order Statistics*, A John Wiley & Sons, Inc.
- Siedlecka U. (1996), *Prognozy ostrzegawcze w gospodarce*, PWE, Warszawa.
- Thomas M.R. (2007), *Statistical Analysis of Extreme Value with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, Birkhauser, Berlin.
- Soczyńska U. (1997), *Hydrologia dynamiczna*, PWN, Warszawa.

## EXTREME VALUES DISTRIBUTIONS IN ANALYSIS THE RISK OF HYDROLOGY IN LOWER SILESIA

### ABSTRACT

The article is devoted to estimating the risk of floods in selected rivers of Lower Silesia. On the basis of empirical data concerning daily water levels of three hydrological stations on the rivers: Odra, Nysa Kłodzka and Nysa Łużycka the empirical distribution function of quarterly high water levels will be illustrated. To empirical distribution, the theoretical distribution will be matched and on its basis the risk of floods danger will be calculated.

*Translated by Łukasz Kuźmiński*

**Keywords:** Gumbella distribution, distribution of maximum, the risk of flood danger, probabilistic forecast, attraction area, danger point, warning state, water level.

**Kod JEL:** C15, Q25.