STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 31

Krzysztof Dmytrów
Uniwersytet Szczeciński

STOCHASTYCZNY MODEL ZAPASÓW ⟨Q, R⟩ DLA PRODUKTÓW PSUJĄCYCH SIĘ PRZY ASYMETRYCZNYM ROZKŁADZIE ZAPOTRZEBOWANIA

Streszczenie

W artykule zaprezentowano prosty stochastyczny model gospodarowania zapasami $\langle Q, r\rangle$ dla utraconej sprzedaży, w którym rozkład zapotrzebowania był asymetryczny (założono, że jest to rozkład wykładniczy). Założono także, że stopa psucia się produktów jest stała. Przeprowadzona analiza pokazała, że im wyższa była stopa psucia się produktów, tym większe były wartości zmiennych decyzyjnych i wyższy całkowity koszt gospodarowania zapasami.

Słowa kluczowe: stochastyczny model zapasów, produkty psujące się, asymetryczny rozkład zapotrzebowania.

Wprowadzenie

W stochastycznych modelach gospodarowania zapasami na ogół zakłada się, że rozkład zapotrzebowania na produkt jest rozkładem normalnym [5; 6]. Klasyczne modele zapasów budowano zatem i rozwiązywano z założeniem normalności rozkładu zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw. Takie założenie nie zawsze jest jednak uzasadnione, gdyż w ekonomii bardzo często występują, a nawet wręcz dominują rozkłady o asymetrii prawostronnej [8, s. 14].

Z tego powodu wielu autorów do aproksymacji rozkładu zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw stosowało rozkłady asymetryczne [4; 2; 3; 9].

W artykule wykorzystano klasyczny model zapasów $\langle Q, r\rangle$ dla utraconej sprzedaży z pełną informacją o kosztach [2, s. 29 i n.]. Dodatkowo założono, że modelowane jest gospodarowanie zapasami produktów psujących się. Modele takie są szeroko opisywane w literaturze zachodniej [5]. Są różne podejścia do problematyki psucia się produktów. Szerzej opisano je w pracy *Dynamiczny model zapasów dla produktów psujących się przy różnych stopach psucia się* [1]. W artykule przyjęto, że w ciągu jednostkowego okresu (tutaj był nim jeden rok) zepsuciu ulega stały odsetek produktów.

1. Założenia i oznaczenia

Założenia klasycznego modelu $\langle Q, r\rangle$ są następujące:

- jednostkowy koszt zakupu jest stały, niezależny od wielkości zamówienia Q,
- jednostkowy koszt niedoborów wynosi p na jednostkę brakującego produktu,
- niedobory występują tylko w bardzo małych ilościach,
- punkt zamawiania r jest dodatni,
- czas realizacji dostaw τ jest stały.

W modelu przyjęto następujące oznaczenia:

A – koszt złożenia i realizacji pojedynczego zamówienia,
p – jednostkowy koszt niedoboru,
h – jednostkowy koszt magazynowania,
λ – roczne zapotrzebowanie na produkt,
r – poziom zamawiania,
$\overline{\eta}(r)$ – oczekiwana ilość niedoborów w jednym cyklu odnowienia zapasów,
$f(x)$, $F(x)$ – funkcja gęstości i dystrybuanta zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw,
μ, σ – nadzieja matematyczna i odchylenie standardowe zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw,
φ – stopa psucia się produktu.

Założenie, że rozkład zapotrzebowania jest rozkładem wykładniczym, przyjęto z dwóch powodów. Po pierwsze, jest to rozkład o skrajnej asymetrii prawostronnej, co dodatkowo podkreśli tę asymetrię, a po drugie, jest on rozkładem bardzo prostym analitycznie.

Funkcja gęstości rozkładu wykładniczego dana jest wzorem:

$$f(x) = \beta e^{-\beta x} \tag{1}$$

gdzie $\frac{1}{\beta} = \mu = \sigma$.

Wiedząc, że wielkość zapotrzebowania na produkt w ciągu roku wynosi λ oraz że psuje się stały odsetek produktów φ, jeżeli, kupimy jednorazowo tyle jednostek, ile wynosi zapotrzebowanie i nic nie zużyjemy, łącznie w ciągu roku zepsuje się $\varphi\lambda$ jednostek.

Aby zaspokoić zapotrzebowanie na produkt, po uwzględnieniu psucia się, faktyczne łączne roczne zapotrzebowanie wyniesie $\lambda^* = \lambda + \phi\lambda = \lambda(1+\phi)$.

2. Model

Funkcja kosztów całkowitych w modelu $\langle Q, r\rangle$ dla utraconej sprzedaży z uwzględnieniem psucia się produktów dana jest następującym wzorem:

$$K(Q,r) = \frac{A\lambda}{Q}(1+\varphi) + h\left(\frac{Q}{2} + r - \mu + \overline{\eta}(r)\right) + \frac{p\lambda}{Q}(1+\varphi)\overline{\eta}(r) \to \min \tag{2}$$

gdzie $\overline{\eta}(r) = \int_r^\infty (x-r)f(x)dx$.

Jak widać, po prawej stronie równania (2) występują trzy sumy. Pierwsza suma to oczekiwane łączne roczne koszty zamawiania (*ŁKZ*), druga suma – oczekiwane łączne roczne koszty magazynowania (*ŁKM*), a trzecia – oczekiwane łączne roczne koszty niedoborów (*ŁKN*).

Dla rozkładu wykładniczego wielkość $\overline{\eta}(r)$ dana jest wzorem:

$$\overline{\eta}(r) = \frac{e^{-\beta r}}{\beta} \tag{3}$$

W celu wyznaczenia optymalnych wielkości zmiennych decyzyjnych Q oraz r należy wyznaczyć pierwsze pochodne cząstkowe równania (2) względem Q i r i przyrównać je do zera:

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial K}{\partial r} = 0.$$

Po podstawieniu $\overline{\eta}(r)$ z równania (3) do równania (2) i wyznaczeniu pochodnych, otrzymamy:

$$Q = \sqrt{\frac{2\lambda(1+\varphi)\left(A + p\frac{e^{-\beta r}}{\beta}\right)}{h}} \tag{4}$$

oraz

$$r = -\frac{\ln\frac{hQ}{p\lambda(1+\varphi)+hQ}}{\beta} \tag{5}$$

Jak wynika z tych równań, żeby obliczyć optymalną wielkość zamówienia, należy znać optymalną wielkość poziomu zamawiania, i na odwrót. Procedura numeryczna otrzymywania optymalnych wielkości Q^* oraz r^* jest następująca:

a) należy wyznaczyć optymalną wielkość zamówienia za pomocą klasycznego wzoru Harrisa-Wilsona (*EOQ*) i oznaczyć ją jako Q_1;
b) należy podstawić wielkość Q_1 do wzoru (5) i wyznaczyć wielkość r_1;
c) wielkość r_1 trzeba wstawić do wzoru (4) i wyznaczyć wielkość Q_2;
d) wielkość Q_2 należy podstawić do (5) i wyznaczyć wielkość r_2.

Tak postępujemy dopóty, dopóki kolejne wielkości Q i r nie będą zbieżne. W analizowanym modelu zbieżność następuje bardzo szybko, już w piątej iteracji otrzymuje się bardzo dokładne wyniki (zbieżność do czwartego miejsca po przecinku).

3. Przykład numeryczny (dane umowne)

Do zilustrowania zachowania się modelu, wykorzystano następujące dane: A = 150,00 zł, p = 40,00 zł, h = 5,00 zł, λ = 1000 jednostek rocznie, czas realizacji dostaw – tydzień, czyli 1/52 roku. W związku z tym, β = 0,052, czyli μ, σ = 19,231. Wielkość stopy psucia się produktów φ przyjęto w przedziale od 0 do 1 ze skokiem 0,2. Jeżeli ma ona wartość 0, to nie występuje psucie się produktów i wówczas model jest klasycznym modelem $\langle Q, r\rangle$ utraconej sprzedaży. Jeżeli φ wyniesie 1, to gdy nie będzie zużycia produktu, wszystkie jednostki ulegną zepsuciu w ciągu roku. Oczywiście, założono, że produkty zaczynają się psuć dopiero w trakcie przechowywania. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki obliczeń

	φ					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Q	264,271	287,648	309,145	329,154	347,947	365,721
r	66,206	68,025	69,559	70,886	72,054	73,098
$\overline{\eta}(r)$	0,6150	0,5595	0,5166	0,4821	0,4537	0,4297
ŁKZ (zł)	567,60	625,76	679,29	729,14	775,98	820,30
ŁKM (zł)	898,63	965,89	1027,09	1083,57	1136,25	1185,79
ŁKN (zł)	93,08	93,36	93,57	93,74	93,89	94,01
$K(Q, r)$ (zł)	1559,31	1685,01	1799,95	1906,46	2006,12	2100,09

Źródło: opracowanie własne.

Wynika z niej, że:

a) wraz ze wzrostem stopy psucia się produktów rosną łączne koszty gospodarowania zapasami $K(Q, r)$;
b) wzrost stopy psucia się produktów powoduje wyraźnie zwiększa optymalną wielkość zamówienia Q;
c) wraz ze wzrostem stopy psucia się produktów optymalna wielkość poziomu zamawiania r wzrasta, jednak nie tak bardzo, jak optymalna wielkość zamówienia;
d) wzrost stopy psucia się produktów powoduje, że zmniejsza się oczekiwana ilość niedoborów w jednym cyklu odnawiania zapasów;
e) w każdym przypadku największy udział w łącznych kosztach miały koszty magazynowania (*ŁKM*) – około 57%, następnie koszty zamawiania (*ŁKZ*) – około 38%, resztę (około 5%) – koszty niedoborów (*ŁKN*).

Podsumowanie

W artykule zaprezentowano klasyczny model zapasów $\langle Q, r \rangle$ dla utraconej sprzedaży i pełną informacją o kosztach, w którym w prosty sposób uwzględniono psucie się produktów. Dalszym rozwinięciem tego modelu byłoby zastosowanie opisywanego podejścia do psucia się produktów w modelu dla zaległych zamówień, mieszaniny zaległych zamówień i utraconej sprzedaży, w modelach z ograniczeniami poziomu obsługi jest dobrze z niepełną informacją o rozkładzie. Model jest nieskomplikowany – zastosowano w nim bardzo prosty analitycznie, wykładniczy rozkład zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw. Należałoby także zbadać zachowanie się modelu dla innych rozkładów zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw.

Literatura

1. Dmytrów K., *Dynamiczny model zapasów dla produktów psujących się przy różnych stopach psucia się*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Metody i Zastosowania Badań Operacyjnych, Katowice 2010.
2. Dmytrów K., *Stochastyczne metody optymalizacji zapasów materiałowych w przedsiębiorstwie*, praca doktorska, Szczecin 2005.
3. Dmytrów K., *Zastosowanie heurystycznej polityki uzupełniania zapasów w modelu* $\langle Q, r \rangle$ *przy asymetrycznym rozkładzie zapotrzebowania*, w: *Metody i zastosowania badań operacyjnych 2002*, materiały konferencyjne, Radom 2003.
4. *Elementy badań operacyjnych w zarządzaniu*, t. I, red. A. Całczyński, Radom 2000.
5. Goyal S.K., Giri B.C., *Recent Trends in Modeling of Deteriorating Inventory*, „European Journal of Operational Research" 2001, No. 134.
6. Hadley G., Whitin T.M., *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1963.
7. Hariga M., Ben-Daya M., *Some stochastic inventory models with deterministic variable lead time*, „European Journal of Operational Research" 1999, No. 113.
8. Hozer J., *Mikroekonometria. Analizy, diagnozy, prognozy*, PWE, Warszawa 1993.
9. Tadikamalla P.R., *A Comparison of Several Approximations to the Lead Time Demand Distribution*, „International Journal of Management Science" 1984, Vol. 12, No. 6.

THE STOCHASTIC INVENTORY MODEL $\langle Q, R \rangle$ FOR DETERIORATING ITEMS WITH ASYMMETRIC DEMAND DISTRIBUTION

Summary

The author presented a simple stochastic lost sales inventory model $\langle Q, r \rangle$ for deteriorating items with asymmetric demand distribution. As an approximation for the lead-time demand, exponential distribution was used. Constant deterioration rate was assumed. The analysis showed that the higher deterioration rate, the higher values of decision variables and total expected costs of inventory management.

Keywords: stochastic inventory model, deteriorating items, asymmetric demand distribution.

Translated by Krzysztof Dmytrów