STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 31

Michał Kolupa
Politechnika Radomska w Radomiu
Joanna Plebaniak
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

KOINCYDENTNOŚĆ MODELU EKONOMETRYCZNEGO A JEGO JAKOŚĆ MIERZONA WARTOŚCIĄ WSPÓŁCZYNNIKA $R^2(K)$

Streszczenie

W artykule pokazano, że jakość koincydentnego modelu ekonometrycznego określonego przez regularną parę korelacyjną ($\mathbf{R}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$), mierzona wartością współczynnika $r^2(k)$, gdzie:

$$r^2(k) = \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{R}_0(k)$$

spełnia warunek:

$$r^2(k) \geq Sr_1,$$

gdzie $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.
Zarówno $r^2(k)$ jak i S obliczamy, stosując macierz brzegową $\mathbf{Q}$ postaci:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(k) & \mathbf{R}_0(k) \\ -\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k) & 0 \\ -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{1}$ – wektor wierszowy k-wymiarowy, którego każda składowa jest równa jedności.
Po wykonaniu (na macierzy $\mathbf{Q}$) przekształceń elementarnych typu α i β dostajemy:

$$\mathbf{Q} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{R}^*(k) & \mathbf{R}_0^*(k) \\ \mathbf{0} & \mathrm{r}^2(k) \\ \mathbf{0} & \mathrm{S} \end{bmatrix},$$

stąd odczytujemy wielkości $r^2(k)$ oraz S.

Słowa kluczowe: macierz korelacji, koincydentność, jakość modelu.

Rozpatrujemy model ekonometryczny określony przez regularną parę korelacyjną ($\mathbf{R}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$), gdzie $\mathbf{R}(k) = [r_{ij}]$ jest macierzą korelacji stopnia k, natomiast wektor $\mathbf{R}_0(k) = [r_i]$ stanowi wektor korelacji. Jest to k-wymiarowy wektor kolumnowy o składowych r_i,. $i = 1, 2, \ldots, k$, będących współczynnikami korelacji między zmienną endogeniczną Y a poszczególnymi zmiennymi objaśniającymi Z_i, to znaczy, że $r_i = r(Y, Z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Z kolei elementami r_{ij} macierzy $\mathbf{R}(k)$ są współczynniki korelacji między parami zmiennych objaśniających Z_i oraz Z_j, czyli $r_{ij} = r(Z_i, Z_j)$,), $i = j = 1, 2, \ldots, k$. Przypominamy, że para korelacyjna ($\mathbf{R}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$) jest regularną parą korelacyjną, to znaczy, że jest spełniona zależność [1]:

$$0 < r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_k < 1 \tag{1}$$

natomiast parze korelacyjnej ($\mathbf{R}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$) odpowiada model:

$$Y = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \ldots + \alpha_k Z_k + e \tag{2}$$

Mówimy, że zmienna Z_i modelu (2) jest zmienną koincydentną, jeżeli:

$$sign\, r_i = sign\, a_i \tag{3}$$

gdzie:

a_i – oszacowanie parametru α_i,
($i = 1, 2, \ldots, k$) modelu (2) uzyskane MNK.

Zatem składowe a_i tworzą wektor $\mathbf{A}(k)$, który jest rozwiązaniem układu równań:

$$\mathbf{R}(k)\mathbf{A}(k) = \mathbf{R}_0(k) \tag{4}$$

Ponieważ para korelacyjna ($\mathbf{R}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$) jest z założenia regularną parę korelacyjną, więc równość (3) przechodzi w równość:

$$sign\, a_i = +1 \tag{5}$$

Chcąc rozstrzygnąć, czy dana zmienna objaśniająca modelu (2) jest zmienną koincydentną, korzystamy z następującego twierdzenia [2]:

Twierdzenie (Kolupa 1986)

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby zmienna objaśniająca Z_i ($1 \leq i \leq k$) była koincydentna, jest spełnienie warunku:

$$r_i > \boldsymbol{\rho}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{R}_{0i} \tag{6}$$

gdzie:

$r_i = r(Y, Z_i)$,

$\boldsymbol{\rho}_i$ – i-ty wiersz macierzy $\mathbf{R}(k)$ bez i-tego elementu.

$\mathbf{R}_{0i}$ powstaje z wektora $\mathbf{R}_0(k)$ przez odrzucenie i-tej jego składowej, a macierz $\mathbf{R}_{ii}$ powstaje z macierzy $\mathbf{R}(k)$ przez odrzucenie i-tego wiersza i również i-tej kolumny. Przypominamy, że istnieje macierz odwrotna do macierzy $\mathbf{R}_{ii}$, ponieważ macierz korelacji jest macierzą dodatnio określoną. Chcąc zatem zbadać koincydentność zmiennej Z_i, korzystamy z macierzy brzegowej $\mathbf{U}_i$ o postaci:

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ii} & \mathbf{R}_{0i} \\ \boldsymbol{\rho}_i & r_i \end{bmatrix} \tag{7}$$

na której wierszach wykonujemy elementarne przekształcenia typu α (macierz $\mathbf{R}_{ii}$ przechodzi w górną macierz trójkątną (zera poniżej głównej przekątnej) z jedynkami na głównej przekątnej) oraz przekształcenia typu β (wektor $\boldsymbol{\rho}_i$ przechodzi w wektor zerowy). Po wykonaniu tych przekształceń macierz $\mathbf{U}_i$ przechodzi w macierz $\mathbf{U}_i^*$ o postaci:

$$\mathbf{U}_i^* = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ii}^* & \mathbf{R}_{0i}^* \\ \mathbf{0} & d_i \end{bmatrix} \tag{8}$$

gdzie:

$$d_i = r_i - \boldsymbol{\rho}_i \mathbf{R}_{ii}^{-1} \mathbf{R}_{0i} \tag{9}$$

Jeżeli $d_i > 0$ ($d_i < 0$), to zmienna Z_i jest koincydentna (nie jest koincydentna).

Przypomnijmy, że jakość pary korelacyjnej ($\mathbf{R}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$) mierzymy wartością współczynnika $\mathrm{r}^2(k)$ o postaci:

$$\mathrm{r}^2(k) = \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{R}_0(k) = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_k r_k \tag{10}$$

Współczynnik ten możemy obliczyć, wykorzystując macierz brzegową $\mathbf{V}$ o postaci:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(k) & \mathbf{R}_0(k) \\ -\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k) & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Wykonujemy na niej przekształcenia elementarne typu α oraz β. Po ich wykonaniu macierz **V** przechodzi w macierz $\mathbf{V}^*$ o postaci:

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^*(k) & \mathbf{R}_0^*(k) \\ \mathbf{0} & \mathrm{r}^2(k) \end{bmatrix} \tag{12}$$

z której bezpośrednio odczytujemy wartość $\mathrm{r}^2(k)$.

Z uwagi na zależności (1) i (5) współczynnik $r^2(k)$ dany wzorem (10) spełnia nierówność [3]:

$$\mathrm{r}^2(k) \geq (a_1 + a_2 + ... + a_k)r_1 \tag{13}$$

Dla wygody w dalszych rozważaniach oznaczono:

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = S \tag{14}$$

Wówczas nierówność (13) zapisujemy w równoważnej postaci:

$$\mathrm{r}^2(k) \geq Sr_1 \tag{15}$$

Pokażemy, w jaki sposób można jednocześnie obliczyć $r^2(k)$ i S. W tym celu skorzystamy z macierzy brzegowej **Q** o postaci:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(k) & \mathbf{R}_0(k) \\ -\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k) & 0 \\ -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

gdzie **1** – wektor wierszowy k-wymiarowy, którego każda składowa jest równa jedności.

Na macierzy **Q** danej wzorem (16) wykonujemy przekształcenia elementarne typu α i β. Po ich wykonaniu otrzymujemy:

$$\mathbf{Q} \sim \mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^*(k) & \mathbf{R}_0^*(k) \\ \mathbf{0} & r^2(k) \\ \mathbf{0} & S \end{bmatrix} \tag{17}$$

Odwołajmy się do przykładu ilustrującego opisane postępowanie.

Przykład.

Dana jest regularna para korelacyjna ($\mathbf{R}(2)$, $\mathbf{R}_0(2)$), gdzie:

$$\mathbf{R}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{R}_0(2) = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Sprawdzamy, czy jest to para koincydentna. Innymi słowy, czy model o postaci:

$$Y = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + e \tag{19}$$

jest koincydentny.

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{01} \\ \rho_1 & r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{bmatrix} \tag{20}$$

oraz:

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{02} \\ \rho_2 & r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Na macierzach brzegowych $\mathbf{U}_1$ oraz $\mathbf{U}_2$ wykonujemy przekształcenia elementarne typu α i β. Mamy zatem:

$$\mathbf{U}_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}22 \end{bmatrix},$$

$0{,}22 > 0$, więc zmienna Z_1 jest koincydentna. Analogicznie:

$$\mathbf{U}_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}34 \end{bmatrix},$$

$0{,}34 > 0$, więc zmienna Z_2 jest koincydentna. Wobec tego para korelacyjna dana wzorem (18) jest koincydntna i regularna. W dalszym ciągu korzystamy z macierzy brzegowej $\mathbf{Q}$ danej wzorem (16):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}4 \\ -0{,}3 & -0{,}4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Na tej macierzy wykonujemy przekształcenia elementarne typu α i β. Mamy wówczas:

$$\mathbf{Q} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}96 & 0{,}34 \\ 0 & -0{,}34 & 0{,}09 \\ 0 & -0{,}8 & 0{,}3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & \frac{17}{48} \\ 0 & 0 & \frac{101}{480} \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

Z macierzy danej wzorem (22) odczytujemy:

$$r^2(k) = \frac{101}{480}; \qquad S = \frac{7}{12} \qquad (24)$$

Ponieważ $r_1 = 0{,}3$, więc $Sr_1 = \frac{7}{40}$. Jest zatem spełniona nierówność (15) ($\frac{101}{480} > \frac{7}{40}$).

Istota przedłożonej propozycji polega na tym, aby móc od dołu oszacować wartość współczynnika $r^2(k)$ mierzącego jakość danej regularnej i koincydentnej pary korelacyjnej. Oszacowanie to powinno być łatwe do wyznaczenia pod względem rachunkowym. Chodzi tu o podanie wielkości Sr_1, która zgodnie z nierównością (15) jest oszacowaniem od dołu współczynnika $r^2(k)$.

Zauważmy, że wyznaczenie sumy S danej wzorem (15) jest możliwe wyłącznie za pomocą macierzy brzegowej, ponieważ wykorzystanie układu (4) jest niecelowe. Posługujemy się macierzą brzegową o postaci:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(k) & \mathbf{R}_0(k) \\ -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (25)$$

Jak zawsze na macierzy tej wykonujemy przekształcenia elementarne typu α i β. Po ich wykonaniu z macierzy $\mathbf{F}^*$ o postaci:

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^*(k) & \mathbf{R}_0^*(k) \\ \mathbf{0} & S \end{bmatrix} \qquad (26)$$

odczytujemy wartość S.

Literatura

1. Hellwig Z., *Przechodniość relacji skorelowania zmiennych losowych i płynące stąd wnioski ekonometryczne*, „Przegląd Statystyczny” 1976, nr 2.
2. Kolupa M., *O kryterium służącym do badania koincydentności danej zmiennej objaśniającej*, „Przegląd Statystyczny”1986, nr 4.
3. Kolupa M., Marcinkowska-Lewandowska W., Radzio A., *Koincydencja modeli ekonometrycznych – teoria i* zastosowania, Instytut Cybernetyki i Zarządzania, SGPiS Warszawa 1991.

COINCIDENCE OF THE ECONOMETRICS MODEL AND ITS QUALITY MEASURED BY THE VALUE OF COEFFICIENT R²(*K*)

Summary

In the paper it was proved that the quality of the coincidence model defined by a regular correlation pair (R(k), $R_0(k)$) measured by the value of coefficient $r^2(k)$ where:

$$r^2(k) = \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{R}_0(k)$$

is the solution to the equation:

$$r^2(k) \geq Sr_1,$$

where $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

Value $r^2(k)$ and S can be derived from a bordered matrix **Q** of:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(k) & \mathbf{R}_0(k) \\ -\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k) & 0 \\ -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix},$$

where **1** – row vector of order 1xk, whose every coefficient is one.
When elementary operations type α and β are performed (on the matrix **Q**), we arrive at:

$$\mathbf{Q} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{R}^*(k) & \mathbf{R}_0^*(k) \\ \mathbf{0} & \mathrm{r}^2(k) \\ \mathbf{0} & \mathrm{S} \end{bmatrix},$$

thus the value of $r^2(k)$ and S can be read.

Keywords: correlation matrix, coincidence, the quality of models.

Translated by Joanna Plebaniak