STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 26

Henryk Kowgier
Uniwersytet Szczeciński

WYBRANE PROBLEMY DOTYCZĄCE OPTYMALIZACJI FUNKCJI UŻYTECZNOŚCI

STRESZCZENIE

W artykule ukazano niektóre aspekty optymalizacji warunkowej funkcji użyteczności dwóch zmiennych, przy założeniu, że warunki ograniczające mają charakter liniowy. Wybór warunkowego ekstremum funkcji użyteczności związany jest z faktem, że zasoby zawsze są ograniczone. Ponadto zinterpretowano optymalną wartość mnożnika Lagrange'a. Wykazano, że aby zoptymalizować swoją funkcję użyteczności, inwestor musi sprawić, by nachylenie jego linii budżetu było takie samo, jak nachylenie warstwicy jego funkcji użyteczności w pewnym punkcie, co – jak sprawdzono – zachodzi w takim punkcie krzywej użyteczności, w którym krzywa ta jest ściśle wypukła ku dołowi.

Słowa kluczowe: funkcja użyteczności, optymalizacja warunkowa, optymalna wartość mnożnika Lagrange'a.

Wprowadzenie

Funkcja użyteczności jest ważnym przyczynkiem decydującym o preferencjach zakupów, jednak jej wyznaczenie nie jest sprawą prostą. Preferencje inwestorów można sprawdzić metodą ankietową. Powstaje jednak pytanie, jak z przebadanych preferencji efektywnie zbudować funkcję użyteczności? Jest to wciąż trudny problem teoretyczny. Można, oczywiście, aksjomatycznie zdefiniować funkcję użyteczności, a następnie z nałożonych warunków spróbować znaleźć jej kształt.

Załóżmy, że inwestor może dokonywać wyboru spośród dwu rodzajów dóbr x i y, przy czym niech dobra te posiadają dodatnią funkcję krańcowej użyteczności, to znaczy $\frac{\partial U}{\partial x} > 0$ oraz $\frac{\partial U}{\partial y} > 0$. Ponadto niech ceny obu dóbr będą określone przez rynek, to znaczy będą dobrami egzogenicznymi, oraz siła nabywcza inwestora dana będzie wielkością B. Zajmiemy się maksymalizacją gładkiej funkcji użyteczności postaci $U = U(x,y)$[1] przy ograniczeniu budżetowym inwestora danym równaniem:

$$xP_x + yP_y = B \tag{1}$$

gdzie:

P_x – cena dobra x,

P_y – cena dobra y.

W tym celu rozpatrzmy funkcję Lagrange′a[2]:

$$F = U(x,y) + \lambda(B - xP_x - yP_y) \tag{2}$$

Warunkiem koniecznym do tego, aby w punkcie $(\tilde{x},\tilde{y})$ istniało ekstremum funkcji $U = U(x,y)$, przy założeniu, że $\tilde{x}$ i $\tilde{y}$ spełniają równanie $f(x,y) = B - xP_x - yP_y = 0$, jest to, by istniała taka liczba $\tilde{\lambda}$, żeby punkt $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\lambda})$ stanowił rozwiązanie układu równań:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \wedge \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \wedge \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

Jeżeli ponadto dla $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\lambda})$ wyrażenie:

---

[1] Zob. E. Panek, *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2000, s. 50.

[2] Zob. G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, Warszawa 1985, s. 416.

$$W = (\frac{\partial f}{\partial y})^2 (\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}) - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}) + \\ + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 (\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) \quad (4)$$

jest ujemne, to w punkcie $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ funkcja $U = U(x, y)$ posiada maksimum.

Nietrudno zauważyć, że gdy W < 0 warunek (4) w naszym przypadku redukuje się do nierówności:

$$P_y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + P_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} < 2P_x P_y \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y},$$

ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, gdzie (P_x, P_y) jest układem cen.

Gradient funkcji celu, który jest gradientem funkcji użyteczności, informuje nas o sile wzrostu, zaś gradient ograniczeń ukazuje, jak hamowany jest ten wzrost. Mnożnik λ pokazuje, o ile wzrost przewyższa hamowanie. W naszym przypadku, przy ograniczeniu liniowym λ mówi nam też o tym, ile złotych wydajemy na przyrost jednostki użyteczności (zadowolenia).

Interpretacja ekonomiczna optymalnej wartości mnożnika Lagrange'a

Wracając do układu równań (3), warunek konieczny na ekstremum funkcji $U = U(x, y)$ możemy napisać jak poniżej:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = B - xP_x - yP_y = 0 \wedge \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda P_x = 0 \wedge \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda P_y = 0 \quad (5)$$

Wyznaczając z dwóch ostatnich równań λ, otrzymujemy:

$$\frac{\partial U / \partial x}{P_x} = \frac{\partial U / \partial y}{P_y} = \lambda \quad (6)$$

Z powyższego równania wynika, że aby zmaksymalizować użyteczność, inwestor musi tak rozdzielić swój budżet, aby dla każdego rodzaju dóbr proporcja między użytecznością krańcową i ceną była taka sama. Zatem w optymalnym położeniu równowagi proporcje te powinny mieć wspólną wartość $\widetilde{\lambda}$.

Zastanówmy się, czym w sensie ekonomicznym jest $\tilde{\lambda}$. Jak się przekonamy za chwilę, $\tilde{\lambda}$ mierzy wrażliwość rozwiązania optymalnego $\tilde{z} = U(\tilde{x}, \tilde{y})$ na zmianę budżetu inwestora. Oznaczmy dodatkowo: $\varphi(x, y) = xP_x + yP_y$. Wówczas układ (5) możemy napisać w postaci równoważnej:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = B - \varphi(x, y) = 0 \wedge \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

Zauważmy, że każde z równań układu (7) można przedstawić jak poniżej:

$$F^{(i)}(\lambda, x, y, B) = 0 \ (i = 1,2,3) \quad (8)$$

Rozpatrzmy jakobian:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \lambda} & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y} \\ \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \lambda} & \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} & \frac{\partial F^{(2)}}{\partial y} \\ \frac{\partial F^{(3)}}{\partial \lambda} & \frac{\partial F^{(3)}}{\partial x} & \frac{\partial F^{(3)}}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x} & -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Niech ponadto $|J| \neq 0$. Wtedy możemy wyrazić $\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{y}$ jako funkcje uwikłane parametru B[3]:

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(B), \ \tilde{x} = \tilde{x}(B), \ \tilde{y} = \tilde{y}(B) \quad (10)$$

gdzie

$$B = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) \wedge \frac{\partial U}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \wedge \frac{\partial U}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad (11)$$

Wartość $\tilde{z}$ zależy od $\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{y}$, zachodzi więc:

$$\tilde{z} = U(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{\lambda}(B - \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})) \quad (12)$$

[3] Zob. H. Kowgier, *Wykorzystanie analizy statyki porównawczej w niektórych problemach dotyczących funkcji użyteczności*, „Przegląd Statystyczny", t. 55, z. 4, Dom Wydawniczy „ELIPSA", Warszawa 2008, s. 104.

Na mocy (12) możemy potraktować $\tilde{z}$ jako funkcję B. Zatem mamy:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial B}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{d\tilde{x}}{dB}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{d\tilde{y}}{dB}+\{B-\phi(\tilde{x},\tilde{y})\}\frac{d\tilde{\lambda}}{dB}+\tilde{\lambda}\{1-\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{d\tilde{x}}{dB}-\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{d\tilde{y}}{dB}\}=$$

$$(\frac{\partial U}{\partial x}-\tilde{\lambda}\frac{\partial \phi}{\partial x})\frac{d\tilde{x}}{dB}+(\frac{\partial U}{\partial y}-\tilde{\lambda}\frac{\partial \phi}{\partial y})\frac{d\tilde{y}}{dB}+\{B-\phi(\tilde{x},\tilde{y})\}\frac{d\tilde{\lambda}}{dB}+\tilde{\lambda}=\tilde{\lambda},$$

wobec zależności (11), więc $\tilde{\lambda}=\frac{\partial \tilde{U}}{\partial B}$, to znaczy optymalna wielkość mnożnika Lagrange′a może być interpretowana jako krańcowa wielkość użyteczności pieniądza przy maksymalizacji użyteczności przez inwestora.

Interpretacja wyrażenia *W*

Zastanówmy się, czym jest wyrażenie W dane wzorem (4). W tym celu oznaczmy:

$$Z = U(x,y)$$

Wtedy różniczka zupełna funkcji użyteczności dana jest wzorem:

$$dZ=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy \tag{13}$$

oraz zachodzi:

$$d^2Z=d(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy)dx+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy)dy=$$

$$(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial (dy)}{\partial x})dx+(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}dy+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial (dy)}{\partial y})dy=$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(dy)}{\partial x}dx + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial U}{\partial y}(\frac{\partial(dy)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dy)}{\partial y}dy) =$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}dy^2 +$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}d(dy) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial U}{\partial y}d^2 y$$

Jak nietrudno zauważyć, wyprowadzona powyżej równość nie jest formą kwadratową wobec występującego na końcu składnika, ale da się ją sprowadzić do formy kwadratowej (19), która będzie nam potrzebna w dalszych rozważaniach.

Wobec definicji funkcji $f(x, y)$ otrzymujemy:

$$df = 0 \text{ oraz } d(df) = d^2 f = 0.$$

Na mocy ostatnich rozważań możemy napisać:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial f}{\partial y}d^2 y = 0 \tag{14}$$

Przekształcając równość (14), mamy:

$$d^2 y = -(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2)(\frac{\partial f}{\partial y})^{-1} \tag{15}$$

Zatem uwzględniając zależność (15), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} d^2 Z = & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial U}{\partial y}(-\frac{\partial^2 f / \partial x^2}{\partial f / \partial y}dx^2 - \\ & 2\frac{\partial^2 f / \partial y \partial x}{\partial f / \partial y}dxdy - \frac{\partial^2 f / \partial y^2}{\partial f / \partial y}dy^2) = \\ & \{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{(\partial U / \partial y)(\partial^2 f / \partial x^2)}{\partial f / \partial y}\}dx^2 + 2\{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{(\partial U / \partial y)(\partial^2 f / \partial y \partial x)}{\partial f / \partial y}\}dxdy + \\ & \{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{(\partial U / \partial y)(\partial^2 f / \partial y^2)}{\partial f / \partial y}\}dy^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Z równości (16) uzyskujemy:

$$\lambda = \frac{\partial U / \partial y}{P_y} = \frac{\partial U / \partial y}{\partial f / \partial y} \tag{17}$$

Uwzględniając własność (17), możemy napisać:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \ , \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} \ , \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{gathered} \tag{18}$$

Wobec równości (18) zależność (16) przyjmuje postać:

$$d^2 Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} dy^2 \tag{19}$$

Powyższe równanie jest formą kwadratową różniczek dx i dy. Aby się przekonać o tym, czy jest to forma kwadratowa dodatnio (ujemnie) określona, przekształćmy tę formę przy warunku liniowym:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0. \tag{20}$$

Z własności (20) wynika:

$$dy = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} dx,$$

oraz

$$d^2 Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} dx(-\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} dx) + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} (-\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} dx)^2 = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} dx^2 - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$$

$$(-\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}) dx^2 + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} (\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y})^2 dx^2 = \{\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} (\frac{\partial f}{\partial y})^2 - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} (\frac{\partial f}{\partial x})^2\} \frac{dx^2}{(\partial f / \partial y)^2} \ .$$

Forma kwadratowa d^2Z jest ujemnie określona, gdy wyrażenie:

$$\{\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(\frac{\partial f}{\partial y})^2 - 2\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(\frac{\partial f}{\partial x})^2\} < 0 \tag{21}$$

Zauważmy, że (21) da się przedstawić jako wartość przeciwna następującego wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}) = 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} - (\frac{\partial f}{\partial x})^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - (\frac{\partial f}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \tag{22}$$

Wyrażenie (21) po uwzględnieniu równości (18) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(\frac{\partial f}{\partial y})^2 - 2\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(\frac{\partial f}{\partial x})^2 =$$

$$(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(\frac{\partial f}{\partial y})^2 - 2(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} +$$

$$(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})(\frac{\partial f}{\partial x})^2 = W.$$

Z powyższego wynika, że funkcja $U(x, y)$ posiada maksimum w pewnym punkcie $(\tilde{x}, \tilde{y})$, gdy wyznacznik (22) jest dodatni. Wyznacznik (22) nazywamy obrzeżonym hesjanem.

Warunek optymalizacji funkcji użyteczności przy danym budżecie inwestora

Warunek (6) po przekształceniu możemy napisać jak poniżej:

$$\frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y} = \frac{P_x}{P_y} \tag{23}$$

Krzywa użyteczności, jak pamiętamy, odpowiada kombinacji *x* i *y*, dla których poziom użyteczności jest ustalony. Zatem zachodzi:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0 \tag{24}$$

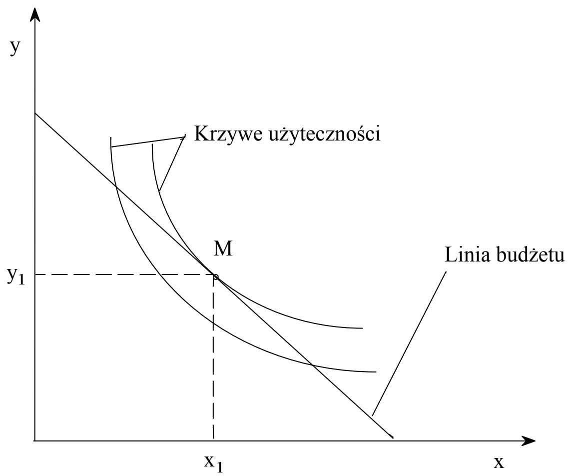
Z równości (24) wynika:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y} \tag{25}$$

więc nachylenie krzywej użyteczności $\frac{dy}{dx}$ jest równe liczbie przeciwnej do ilorazu użyteczności krańcowych.

Wobec tego, że $\frac{\partial U}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial U}{\partial y} > 0$ otrzymujemy $\frac{dy}{dx} < 0$. Z drugiej strony, ponieważ wielkość $\frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y}$ jest liczbą przeciwną do nachylenia krzywej użyteczności, to reprezentuje krańcową stopę substytucji dwu dóbr.

Rysunek 1. Nachylenie linii budżetu i krzywej użyteczności



Źródło: opracowanie własne.

Korzystając z równości (1), mamy:

$$y = \frac{B}{P_y} - \frac{P_x}{P_y} x \tag{26}$$

Stąd widać już, że liczba $-\frac{P_x}{P_y}$ przedstawia nachylenie linii budżetu w układzie $x\,y$.

Z powyższego wynika, że w celu zmaksymalizowania użyteczności inwestor powinien tak dysponować swoim budżetem, aby nachylenie linii jego budżetu było równe nachyleniu pewnej krzywej użyteczności. Na rysunku (1) jest to spełnione w punkcie *M*, gdzie linia budżetu jest styczna do pewnej krzywej użyteczności. Wykażemy obecnie, że jeżeli hesjan obrzeżony:

$$\left|\hat{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & P_x & P_y \\ P_x & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \\ P_y & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 2P_x P_y \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - P_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - P_y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0,$$

to w punkcie *M* mamy ścisłą wypukłość krzywej obojętności nachylonej ku dołowi. W tym celu należy udowodnić, że $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$.

Ze wzoru (25) mamy:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y},$$

więc

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial U}{\partial x}}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} \tag{27}$$

na mocy wzoru na pochodną ilorazu dwóch funkcji.

Ponadto wobec tego, że pochodne cząstkowe są funkcjami również dwóch zmiennych, mamy:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{dy}{dx} \tag{28}$$

Uwzględniając to, że zachodzi również $\frac{dy}{dx} = -\frac{P_x}{P_y}$, otrzymujemy:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{P_x}{P_y}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{P_x}{P_y} \tag{29}$$

Podstawiając (29) do równania (27), uzyskujemy:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{P_x}{P_y}\right)\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{P_x}{P_y}\right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} \tag{30}$$

Z drugiej strony:

$$\frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y} = \frac{P_x}{P_y}, \text{ więc } \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}\frac{P_x}{P_y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{P_x}{P_y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{P_x}{P_y}.$$

Podstawiając powyższe do wzoru (30), otrzymujemy:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{P_x}{P_y} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{P_x}{P_y}}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} =$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{P_x}{P_y} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\frac{P_x}{P_y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{P_x}{P_y}\frac{P_x}{P_y}}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} =$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial y}(-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{P_x}{P_y}+\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\frac{P_x}{P_y}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{P_x^2}{P_y^2})}{(\frac{\partial U}{\partial y})^2}=$$

$$\frac{-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}P_y^2+2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}P_x P_y-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}P_x^2}{\frac{\partial U}{\partial y}P_y^2}=\frac{|\hat{H}|}{\frac{\partial U}{\partial y}P_y^2}.$$

Jeżeli $|\hat{H}|>0$, to $\frac{d^2 y}{dx^2}>0$, bo $\frac{\partial U}{\partial y}>0$ oraz $P_y^2>0$. Odwrotnie również zachodzi, ponieważ z tego, że $\frac{d^2 y}{dx^2}>0$ oraz $\frac{\partial U}{\partial y}>0$ i $P_y^2>0$ otrzymujemy, iż $|\hat{H}|>0$.

Posumowanie

Z powyższych obliczeń wynika, że z optymalizacją funkcji użyteczności danego inwestora związana jest również pewna optymalna wartość mnożnika Lagrange'a, jak również warunek dotyczący jego budżetu. W punkcie odpowiadającym maksymalnej wartości funkcji użyteczności dana krzywa obojętności jest ściśle wypukła ku dołowi.

Literatura

Fichtenholz G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1985.

Kowgier H., *Wykorzystanie analizy statyki porównawczej w niektórych problemach dotyczących funkcji użyteczności*, „Przegląd Statystyczny" t. 55, z. 4, Dom Wydawniczy „ELIPSA", Warszawa 2008.

Panek E., *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2000.

SELECT PROBLEMS RELATING THE OPTIMIZATION OF UTILITY FUNCTON

Summary

In the paper has been showed essential problems relating the conditional optimization of utility function. In peculiarity: Optimum value of multiplier Lagrange'a was interpreted and one introduced how can investor optimize one's function of utility.

Translated by Henryk Kowgier

Keywords: utility function, conditional optimization, optimum value of multiplier Lagrange'a.