STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 26

Krzysztof Heberlein
Uniwersytet Szczeciński

O WYBRANYCH SPOSOBACH OPISU DYNAMIKI EKONOMICZNYCH STRUKTUR PRZESTRZENNYCH

STRESZCZENIE

W artykule przedstawiono sposoby opisu struktur przestrzennych, których konstrukcja jest uzależniona od charakteru badanych zjawisk. Zwrócono uwagę na różnorodność określeń przestrzeni, ich rodzaje i cechy. Podano sformalizowany sposób identyfikacji struktur przestrzennych, która jest niezbędna do precyzyjnego interpretowania zachodzących w nich procesów. Opracowanie zawiera porównawcze zestawienie możliwości opisu dynamiki zachowań w ekonomicznych strukturach przestrzennych przy pomocy matematycznych modeli opisowych, w których główną rolę odgrywają równania różniczkowe, różnicowe i ekonometryczne.

Słowa kluczowe: ekonomiczne struktury przestrzenne, modele dynamiki.

Wprowadzenie

Przestrzeń jest pojęciem, które na ogół rozumiane jest intuicyjnie. Jednak w większości przypadków nie wystarcza to zarówno do jej opisu, jak i głębszej analizy. W wielu dyscyplinach naukowych jest pojęciem kluczowym. Dyscypliny naukowe posługują się pojęciem przestrzeni publicznej, społecznej, osobistej *etc*. Matematycy definiują różne przestrzenie, na przykład: Euklidesową, Banacha, Minkowskiego. Każde zjawisko związane jest z przestrzenią. Posługiwanie się przestrzenią w naukach ekonomicznych wymaga również sprecyzowania tego pojęcia i to tym bardziej w sposób sformalizowany, im większe są oczekiwania co do jednoznaczności aplikacji.

Celem artykułu jest próba systemowego spojrzenia na zagadnienie identyfikacji i opisu przestrzeni za pomocą aparatu metod ilościowych oraz porównawcze zestawienie możliwości sposobów modelowania zmian ekonomicznych struktur przestrzennych w czasie.

Przestrzeń, jej cechy i rodzaje

Przestrzeń charakteryzuje się pewnymi cechami, właściwościami lub atrybutami, które w literaturze są różnie opisywane. Do cech przestrzeni zalicza się między innymi: ograniczoność, opór i zróżnicowanie[1]. Ograniczoność wynika ze stałej wielkości planety i struktury jej elementów. Nie jest ona zastępowalna, stanowi, obok czasu, materii i energii, dobro rzadkie. Opór przestrzeni oznacza konieczność użycia odpowiedniej ilości energii, środków i czasu w celu jej udostępnienia dla realizacji określonej działalności ludzkiej. Kolejną cechą przestrzeni jest jej zróżnicowanie ze względu na właściwości naturalne i antropogeniczne. Na zróżnicowanie cech naturalnych o charakterze geograficznym nakłada się różnorodność form zagospodarowania przestrzennego tworzonych przez człowieka.

Przestrzeń jest również charakteryzowana przez atrybuty, identyfikowane z punktu widzenia geografii. Należą do nich: wyłączność, odległość, kierunek, sąsiedztwo, wielkość i wypełnienie. Wyłączność (wynikająca z zasady koherencji lokalizacyjnej) oznacza, że w danym miejscu może znajdować się tylko jeden obiekt i jeden obiekt zajmuje tylko jedno miejsce. Odległość rozumiana jest w ten sposób, że między obiektami w przestrzeni istnieje dystans dający się mierzyć jednostkami miary, na przykład kilometrami, godzinami potrzebnymi do pokonania odległości i tym podobnych. Kierunek rozumiany jest w sensie geograficznym, na przykład północ-południe, wschód-zachód. Atrybut sąsiedztwo jest pochodną odległości i kierunku i oznacza, że każdy obiekt znajduje się w otoczeniu innych obiektów występujących w różnej odległości i różnych kierunkach od niego. Każda przestrzeń i jej poszczególne części posiadają wielkość, którą da się wyrazić za pomocą odpowiednich jednostek miary (np. w km^2).

[1] Zob. B. Malisz, *Podstawy gospodarki i polityki przestrzennej*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław–Warszawa–Kraków–Gdańsk–Łódź 1984, s. 49–57.

W przestrzeni znajdują się obiekty fizyczne i zamieszkują ją ludzie tworzący różne instytucje, organizacje. Atrybut ten nosi nazwę wypełnienia.

W wyniku organizowania działalności ludzkiej w przestrzeni geograficznej kształtują się inne rodzaje przestrzeni. Wyróżnia się przestrzeń przyrodniczą, ekonomiczną, społeczną i kulturową. Przestrzeń przyrodnicza wypełniona jest elementami przyrodniczymi stwarzającymi warunki niezbędne do życia. Występujący w przestrzeni geograficznej człowiek podporządkowuje sobie tę przestrzeń, rozwijając działalność gospodarczą. Tworzy się w ten sposób przestrzeń ekonomiczna (gospodarcza) o określonej przydatności i użyteczności oraz posiadająca swoją wartość ekonomiczną.

Otaczająca rzeczywistość może być również postrzegana w innych kategoriach przestrzeni. To odmienne podejście związane jest z wyróżnieniem trzech podstawowych rodzajów przestrzeni: fizycznej, geograficznej i intelektualnej[2].

Przestrzeń fizyczna jest obszarem bytu materialnego. Jej wymiarami są: długość, szerokość i wysokość. Wymiary cechują się jednakową rangą – współrzędne są ekwiwalentne.

Przestrzeń geograficzna jest przestrzenią życia biologicznego. Współrzędne są nieekwiwalentne pod względem zmienności warunków przyrodniczych. Największą zmienność posiada długość geograficzna, warunkująca realizowanie się dobowego rytmu dnia i nocy; nieco mniejszą – szerokość geograficzna, której podlegają zmiany warunków atmosferycznych o cyklu rocznym; najmniejszą zmienność ma wysokość, odznaczająca się najkrótszym zasięgiem sfery biologicznej. W przestrzeni geograficznej znajduje swój wymiar energia – w przestrzeni tej identyfikowane są wszystkie procesy energetyczne: prędkość, ciśnienie, natężenie i tym podobne.

Przestrzeń intelektualna jest obszarem procesów myślowych związanych z przetwarzaniem informacji, których efektem są określone symbole, związki i znaczenia. Przestrzeń intelektualną łączy z przestrzenią fizyczną i geograficzną określony kod, czyli sposób przyporządkowania konkretnym nośnikom określonych treści abstrakcyjnych. Liczba wymiarów przestrzeni intelektualnej równa się liczbie wyróżnionych charakterystyk rozpatrywanych obiektów. Te charakterystyki podzielić można na trzy kategorie: charakterystyki fizyczne (cechy), charakterystyki funkcjonalne (właściwości) i charakterystyki strukturalne (własności). Cechy to charakterystyki zewnętrzne obiektu (wygląd, kształt

[2] Por. *Badania przestrzenne rynku i konsumpcji*, S. Mynarski (red.), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992, s. 9 i n.

itp.). Właściwości to charakterystyki funkcjonalne obiektu związane z jego ruchem (kurczliwość, sprężystość itp.). Własności to charakterystyki strukturalne obiektu będące jego atrybutami, odróżniającymi go od innych obiektów (np. koherencja, redundancja).

Transformacja realnych obiektów w abstrakcyjne twory dokonywana jest zwykle za pomocą skalowania wielowymiarowego. Procedura ta prowadzi do rozpatrywania każdego obiektu jako punktu w przestrzeni wielowymiarowej o współrzędnych odpowiadającym wartościom charakterystyk tych obiektów. Uogólnieniem tej transformacji jest struktura przestrzenna, która jest skończonym uporządkowanym zbiorem elementów przestrzeni cech.

Identyfikacja elementów w ramach danej struktury może mieć miejsce tylko wówczas, gdy cechy są niezależne, a ich obszarem geometrycznym jest przestrzeń ortogonalna. Do osiągnięcia takiej przestrzeni niezbędne jest zastąpienie większej liczby cech zależnych mniejszą liczbą czynników niezależnych. W przypadku cech zależnych następuje odkształcenie struktury wielowymiarowej i spłaszczenie obszaru identyfikowalności. Elementy położone w takim obszarze charakteryzują się nadmiarem informacji, czyli „przeidentyfikowaniem", natomiast elementy położone poza tym obszarem charakteryzują się niedoinformowaniem. Stosując procedurę rotacji ortogonalnej, można osiągnąć ekwiwalentność współrzędnych i w rezultacie lepszą oznaczoność współrzędnych przestrzeni oraz właściwszą identyfikację obiektów przestrzennych. Rotacja ortogonalna przemianowuje nieoznaczone czynniki główne na czynniki lepiej odpowiadające wspólnym wpływom reprezentowanych przez nich cech. Ortogonalizacja i rotacja ortogonalna przestrzeń abstrakcyjną cech upodabniają do przestrzeni fizycznej (geograficznej), w szczególności do przestrzeni trójwymiarowej.

Identyfikacja struktury przestrzennej

Strukturę przestrzenną (w sensie abstrakcyjnym) można zdefiniować jako skończony i uporządkowany zbiór elementów w przestrzeni ich cech. Skończoność oznacza całościowość pewnego fragmentu rzeczywistości, uporządkowanie elementów względem siebie. Przestrzeń cech to obszar zorientowany według współrzędnych cech.

Identyfikacja polega na istnieniu trójki uporządkowanej: $< x_i, v_j, r_k >$, gdzie: x_i, $i = 1, ..., n$ – nazwa (desygnat) i-tego elementu, v_j, $j = 1, ..., m$ – deskryptor opisujący j-ą cechę elementu, r_k, $k = 1, ..., s$ – kwantyfikator wyrażający pomiar danej cechy w odpowiedniej skali liczbowej.

Identyfikacja na poziomie desygnatu umożliwia rozróżnienie elementu w sensie nominalnym, na poziomie deskryptorów w sensie porządkowym, na poziomie kwantyfikatorów – w sensie wartościowym. Rozróżnialność, orientowalność i różnorodność składają się na pełny opis elementów w ramach danej struktury. Odpowiednikiem w aspekcie przestrzennym na poziomie desygnatu jest punkt, na poziomie deskryptorów – przestrzeń, a na poziomie kwantyfikatorów skale współrzędnych. Istnienie tych trzech identyfikatorów stwarza warunki określenia punktów w przestrzeni.

Struktura przestrzenna może przyjmować różną postać zależną od liczby wymiarów przyjętych skal wartości. Najprostszą strukturą jest struktura jednowymiarowa dwuwartościowa (jedna cecha i dwie wartości), bogatszą dwuwymiarowa wielowartościowa i wreszcie występują struktury przestrzenne cztero- i więcej wymiarowe, gdzie obraz fizycznej przestrzeni zanika i w grę wchodzi wyłącznie interpretacja analityczna oparta na formie języka abstrakcyjnego.

Każdą wielkość zależną od pewnej liczby zmiennych można traktować jako obiekt wielowymiarowy o odpowiedniej liczbie cech, których zaobserwowane wartości są współrzędnymi tego obiektu w przestrzeni wielowymiarowej. Rozmieszczone obiekty można następnie analizować pod względem wpływów wewnętrznych i zewnętrznych. Taka struktura funkcjonuje jako efekt oddziaływań wewnętrznych (*intraakcji*) i oddziaływań zewnętrznych (*interakcji*). Wskutek zaniku działań upada struktura poprzez utratę niejednorodności. Struktura jednorodna to struktura nieprzedstawiająca żadnej wartości z punktu widzenia informacji[3]. Jest to struktura o maksymalnej entropii i nie można w niej identyfikować relacji czynników zewnętrznych i elementów wewnętrznych. Stąd zdecydowanie bardziej pożądane są struktury niejednorodne, uporządkowane pod względem entropijnym. Pożądany stan różnorodności struktury można osiągnąć po uprzednim zidentyfikowaniu struktury pod względem ilościowym (elementy) i jakościowym (relacje).

[3] W strukturze jednorodnej nie zachodzą żadne procesy porządkowania. Wszystkie procesy dostosowawcze ustają, jest to tzw. stan równowagi termodynamicznej o maksymalnym nieuporządkowaniu.

Opisy przestrzeni

Opisy i rozwiązania problemów spotykane w analizie przestrzennej zależą ściśle od pojęcia przestrzeni. Różnorodność sposobów wprowadzania przestrzeni i wykorzystywane opisy zależą w dużym stopniu od rodzaju rozpatrywanych problemów. Definiowane są one za pomocą aksjomatów przedstawiających przestrzeń jako zbiór miejsc wraz z przyporządkowaną im odległością, o pewnej postaci, pewnej mierze powierzchni i miarach atrybutów. Każda z nich pozwala analizować w specyficzny sposób strukturę i ekonomiczną rolę przestrzeni. Będąc pomocniczą względem opisu układów ekonomicznych, określa ich konfigurację: postać, wymiar, pozycję i odległość. Warunkuje ona w dużym stopniu sposób analizy zachowań podmiotów gospodarujących w centrum tych układów, w podobny sposób jak rzeczywisty zakres przestrzenny[4].

Najczęściej rozpatrywane układy ekonomiczne mają postaci heksagonalne lub kołowe wraz z pewnym rozszerzeniem. Opisy mogą mieć charakter deterministyczny, probabilistyczny czy też być niedokładnie określone, co wiąże się z rodzajem zachowań przydzielonych podmiotom gospodarującym.

Z każdym z opisów związana jest szczególna struktura matematyczna przestrzeni abstrakcyjnej. Definiuje ona w sposób ścisły założenia charakteryzujące przestrzeń ekonomiczną.

Do najbardziej popularnych rodzajów opisów przestrzeni należą: metryczne i niemetryczne opisy przestrzeni oraz opisy dokładnie i niedokładnie określone. Skądinąd jednak liczba opisów przestrzeni jest niczym nieograniczona.

Odległość strukturalizuje przestrzeń ekonomiczną. Własności przemieszczeń w przestrzeni warunkowane są formalnymi pomiarami odległości. Najprostszą jest metryka euklidesowa. Zbiór związanych z nią założeń jest jednak ograniczony ponieważ implikuje ona przemieszczenia w linii prostej wzdłuż odcinka łączącego dwa dowolne punkty przestrzeni (przez długi czas była jedyną używaną w modelach lokalizacji). W niektórych przypadkach wykorzystywana jest prostokątnoliniowa przestrzeń Hotellinga. Służy ona między innymi do badania mechanizmów konkurencyjnych podziału rynku. Wiele jednak ograniczeń powoduje konieczność szukania innych metryk, pozwalających lepiej uwzględniać kierunki przemieszczeń.

[4] Zob. *Ekonomiczna analiza przestrzenna*, C. Ponsard (red.), Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1992, s. 316 i n.

Najbardziej użyteczne substytuty metryki euklidesowej to metryki prostokątnoliniowe i nieprostokątnoliniowe, które wraz z metryką circum-radialną cechują się dużo słabszymi założeniami ekonomicznymi. Przestrzeń z tymi metrykami przestaje być izotropowa względem kosztów transportu, nie musi być wypukła. Podobnie metryka circum-radialna prowadzi do osłabień założeń o ciągłości i izotropiczności przestrzennych.

Ze względu na dużo większą ograniczoność opisów metrycznych niż by się to wydawało, ekonomista musi sięgać do niemetrycznych opisów. Odległość między punktami zmienia się w zależności od kierunku przemieszczenia lub różnym punktom może odpowiadać zerowa odległość, również może być odrzucony warunek trójkąta.

Przestrzeń nie jest zredukowana do zbioru sieci, ma również zasięg, powierzchnię i własności wykraczające poza możliwości ich zmierzenia. Formalizacja relacji odległości między punktami przestrzeni wprowadza do opisu przestrzeni jej zasięg. Zasięg jest obok odległości zasadniczym składnikiem modeli ekonomicznych.

Metryki euklidesowe i prostokątnoliniowe opisują postaci i własności metryczne bardzo zróżnicowane, zachowując przy tym tę samą topologię. Innego topologicznego opisu przestrzeni ekonomicznej dostarcza teoria grafów. Graf opisuje bardziej szczegółowo strukturę aniżeli opisywana przez przestrzeń metryczną; przestrzeń nie musi być ciągła ani izotropowa.

Tradycyjne przestrzenie ekonomiczne (rynki, miasta, regiony) są dokładnie zdefiniowane poprzez swoje charakterystyki. Układy ekonomiczne mają określone granice, ustalone poprzez podziały przestrzeni; przebiegające przez nie sieci są również zdefiniowane przez miary odległości między każdą parą punktów. Jednak trudno taki sposób opisu uważać za w pełni zgodny z naturalną złożonością przestrzeni. Uproszczenia, jakimi się w nim operuje, mogą być jedynie szczególnym przypadkiem bardziej ogólnych sposobów opisu. Układy ekonomiczne i zachowania realizujące się w przestrzeniach ekonomicznych są niedokładnie określone. Takimi zachowaniami zajmuje się teoria zbiorów rozmytych[5].

[5] Zob. W. Ostasiewicz, *Zastosowanie zbiorów rozmytych w ekonomii*, PWN, Warszawa 1986, podstawowe pojęcia dotyczące opisu przestrzeni metrycznych zawiera praca *Ekonomiczna analiza przestrzenna*, *op.cit.*, s. 286 i n.; zob. też K. Jajuga, *Statystyczna teoria rozpoznawania obrazów*, PWN, Warszawa 1990, s. 157–178.

Opis przestrzeni z uwzględnieniem czynnika czasu

Opis struktur przestrzennych wymaga podejścia modelowego. W szczególności wykorzystuje się modele matematyczne typu opisowego. Jednym z elementów opisowych relacji modeli jest czas, reprezentowany przez zmienną czasową *t* (bądź jej funkcje) w sposób jawny lub poprzez różne formy opóźnień czasowych.

Rola czasu w procesach poznania poprzez tworzenie (odkrywanie) empirycznych praw nauki wydaje się oczywista, niemniej jednak wymaga bardziej precyzyjnego określenia.

Czas wiązany jest z zasadami przyczynowości, współistnienia i celowości[6]. W sferze zjawisk ekonomiczno-społecznych działanie ludzi sprawia, że występują trzy rodzaje sprzężeń: przyczynowe, celowe i koegzyntencjalne. J. Hozer, poprzez odwołanie się do tak zwanego warunku *INUS*[7], z którego wynika, że określony czynnik *X* może występować względem skutku *Y*, jako konieczny, ale niewystarczający składnik warunku wystarczającego, który nie jest konieczny, uznaje, że w sferze zjawisk społeczno-ekonomicznych:

– ma miejsce zarówno Hume'owska zasada przyczynowości, Machowska zasada koegzystencji oraz Weberowska celowość, w której *A* zachodzi po to, by zaszło *B*; typ związku zależy od okoliczności,
– występuje wielość celów i środków, co wiąże się z potrzebą stosowania warunku *INUS*,
– związki przyczynowe mają charakter indeterministyczny, a więc probabilistyczny,
– istnieje potrzeba bezpośredniego uwzględniania czasu, który jest czynnikiem koegzystencjalnym o charakterze *INUS*.

Czas rozpatrywany jest jako okres, w którym odbywa się działalność gospodarcza człowieka, staje się z kategorii filozoficznej i matematyczno-fizycznej kategorią ekonomiczną. Ekonomiczny charakter czasu przekształca go w czynnik komplementarny wszelkiej produkcji; bez czynnika czasu niemożliwa jest jakakolwiek działalność gospodarcza. Czas staje się zmienną niezależną funkcji przemieszczania, funkcji wszelkiej działalności i wszelkiej

---

[6] Zagadnienie to w poglądowy sposób przedstawia J. Hozer w pracy *Czas i przestrzeń w modelowaniu ekonometrycznym, czyli: tempus, locus, homo, casus et fortuna regit actum*, Rectors Lectures, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 1998.

[7] *Insufficient, but not-redundant part of unnecessary but sufficient condition.*

dynamiki. Czas z kryterium porządkowania zmienia się w zmienną wpływającą na przebieg zjawisk.

Jednym ze sposobów opisu przestrzeni jest modelowanie matematyczne za pomocą równań opisowych. Wśród modeli równań opisowych można wyróżnić równania różniczkowe i różnicowe oraz równania ekonometryczne. Sposoby te wykazują wiele cech wspólnych, głównie ze względu na cele ich budowy, ale też różnią się właściwościami, konstrukcją, rozwiązywaniem i interpretacją. Natomiast czynnik czasu ujmowany jest w sposób zbliżony we wszystkich przypadkach.

Układy równań różniczkowych pierwszego rzędu

Układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu tworzą równania:

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x, y, x', y') = 0 \\ \Phi_2(t, x, y, x', y') = 0 \end{cases} \tag{1}$$

gdzie t jest zmienną niezależną. Całką układu nazywany jest taki układ dwóch funkcji

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \tag{2}$$

określonych, ciągłych i różniczkowalnych w pewnym zbiorze, które wstawione do układu (1) zamieniają równania układu na tożsamości.

Układ (1) daje się niekiedy rozwiązać względem pochodnych x' i y'; przybiera on wtedy następującą prostszą postać, zwaną normalną postacią Cauchy'ego:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \tag{3}$$

R. Domański[8] podjął próbę skonstruowania modeli odwzorowujących dynamikę wybranych układów przestrzennego zagospodarowania Polski. Celem tej próby było wniknięcie w mechanizm zmian układów dynamicznych.

[8] Zob. R. Domański R., *Przestrzenna transformacja gospodarki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997, s. 117.

Ogólną postać modelu tworzą nieliniowe równania dynamiczne:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) + f_1(t) \\ \frac{dy}{dx} &= g(x, y) + g_1(t) \end{aligned} \tag{4}$$

Równania te opisują zmiany układów w czasie. Funkcjom $f(x, y)$ i $g(x, y)$ nadano postać wielomianu dwóch zmiennych zależnych od czasu, w których czas nie występuje *explicite*, natomiast $f_1(t)$ oraz $g_1(t)$ są wyłącznie funkcjami czasu. Aproksymując za pomocą wielomianów szeregi statystyczne $x(t)$ oraz $y(t)$, uzyskano równania wyrażające zależność tych zmiennych od czasu. Na podstawie aproksymacji wielomianowej można skonstruować wykres współzależności w przestrzeni fazowej 0*xy*. Podobny wykres można uzyskać z rozwiązań równań dynamicznych opisujących badane zagadnienia.

Opis zachowania się systemu dążącego do stanu równowagi w konwencji równań różniczkowych przedstawia J. Siedlecki[9].

Układ równań różniczkowych definiowany jest w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial t} &= f_1(X_1, X_2, ..., X_n) \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} &= f_2(X_1, X_2, ..., X_n) \\ \frac{\partial X_3}{\partial t} &= f_3(X_1, X_2, ..., X_n) \end{aligned} \tag{5}$$

Zachowanie się systemu dążącego do równowagi obrazują tu trajektorie stanu, które odpowiadają rozwiązaniom zbieżnym ze stanem niezależnym od czasu. Sprowadzając funkcje $f_1(X_1, X_2, ..., X_n)$ do funkcji jednej zmiennej (*i*-tej zmiennej), układ równań różniczkowych można zapisać jako:

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

[9] Zob. J. Siedlecki, *Równowaga a wzrost gospodarczy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Wrocław 2000, s. 21 i n.

Po rozwinięciu funkcji $F_i(X_i)$ w szereg Taylora otrzymuje się rozwiązanie każdego równania, zależnie od przyjętego stopnia rozwinięcia.

Jeśli przyjmie się na przykład, że:

$$F(X_i) = a_1 X_i + a_2 X_i^2 \tag{7}$$

to rozwiązanie jest w postaci:

$$X_i = \frac{aCe^{a_1 t}}{1 - a_2 e^{a_1 t}} \tag{8}$$

Funkcja przedstawia znaną w ekonomii krzywą logistyczną i jest matematycznym wyrazem prawa malejących relatywnie efektywności nakładów.

Teoria systemów otwartych jest teorią dynamiczną. Początkowy stan rozwoju nie jest stanem równowagi stacjonarnej. Rozwój systemów może przebiegać w różnych warunkach zewnętrznych z różnym tempem. Procesy opisywane za pomocą funkcji logistycznej charakteryzuje równowaga dynamiczna, którą można nazwać równowagą logistyczną.

Funkcja ta jest jedynym rozwiązaniem równania (równanie to przedstawia prawo Robertsona):

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{c}{a} y(a - y) \tag{9}$$

przy warunku początkowym $y(0) = \dfrac{a}{1 + e^b}$

Równania różnicowe

Przy formalnym przedstawieniu modelu istnieje możliwość wyboru, gdyż można go sformułować w kategoriach ciągłych lub okresowych, jeśli idzie zarówno o jego treść ekonomiczną, jak i formę matematyczną. W dużej mierze decyduje o wyborze wygoda manewrowania elementami modelu z ekonomicznego i matematycznego punktu widzenia.

W analizie okresowej strumień czasu jest podzielony na kolejne okresy o stałej długości przyjętej jako jednostkę czasu. Jeżeli model jest dynamiczny w tym sensie, że zmienne występują w różnych momentach, to warunki modelu redukują się do równania różnicowego.

Równanie różnicowe zdefiniować można jako równanie funkcyjne łączące jedną albo więcej różnic $\Delta y, \Delta^2 y$ i tak dalej. dla nieznanej funkcji czasu. Można je zapisać w postaci:

$$\varphi\left(t, y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t, \ldots, \Delta^n y_t\right) = 0 \tag{10}$$

lub
$$y_{t+1} = f\left(y_t, y_{t-1}, y_{t-2,\ldots,} y_{t-n}\right), \quad t = 0,1,\ldots \tag{11}$$

Rzędem równania jest rząd najwyższej występującej w nim różnicy. Równanie rzędu pierwszego zawiera Δy_t, ale nie zawiera żadnych różnic wyższego rzędu, równanie rzędu drugiego zawiera $\Delta^2 y_t$, ale nie zawiera żadnych wyższych różnic i tak dalej.

Równania różnicowe pierwszego rzędu mają postać:

$$y_{t+1} = f\left(y_t\right), \qquad y_t = f\left(y_{t-1}\right) \tag{12}$$

Jeżeli funkcja *f* przyjmować będzie postać liniową, to równania (12) są liniowymi równaniami różnicowymi rzędu pierwszego, w przypadku nieliniowej funkcji *f* są to równania różnicowe nieliniowe.

Rozwiązanie równania różnicowego to taka funkcja zmiennej *t*, która jest zgodna z danym równaniem różnicowym i jego warunkami początkowymi. Nie może zawierać żadnych wyrażeń różnicowych.

Dla liniowych równań różnicowych pierwszego rzędu metoda rozwiązywania jest analogiczna jak dla równań różniczkowych. Przykładowo dla równania:

$$y_{t+1} + a y_t = c \tag{13}$$

rozwiązanie jest następujące:

$$\begin{aligned} y_t &= A\left(-a\right)^t + \frac{c}{1+a}, \quad dla\ a \neq -1, \\ y_t &= A(-a)^{-t} + ct, \qquad dla\ a = -1 \end{aligned} \tag{14}$$

Model ekonometryczny jako narzędzie identyfikacji i dynamiki relacji w przestrzeniach ekonomicznych

Czynnikami modelowania są: teoria, rzeczywistość i techniki estymacji parametrów. Aby zbudować model empiryczny, należy przedstawić teorię w postaci modelu teoretycznego. Rzeczywistość związana jest z badanymi zjawiskami i występuje w postaci zbiorów danych (obserwacji) dotyczących tych zjawisk. Model teoretyczny przedstawia w sformalizowanej postaci teorie stanowiące podstawę jego konstrukcji. Teorie te będą później weryfikowane i wykorzystane w modelu operacyjnym. Teoria w postaci modelu teoretycznego i rzeczywistość odwzorowana poprzez odpowiednio przygotowane dane w połączeniu z technikami estymacji umożliwiają oszacowanie nieznanych parametrów modelu. W rezultacie otrzymuje się model empiryczny (operacyjny), to znaczy przetestowany, gotowy do użycia (analizy struktury, symulacji i sterowania). Jego ostateczna postać jest kompromisem pomiędzy teorią (w postaci modelu teoretycznego) i praktyką (w postaci dostępnych danych, metod estymacji i możliwości obliczeniowych komputerów).

Model w sensie algebraicznym to jedno równanie algebraiczne (model jednorównaniowy) lub układ równań algebraicznych (model wielorównaniowy). Spośród zmiennych modelu można wydzielić zmienne endogeniczne, których wielkości są wyznaczane przez model, i zmienne egzogeniczne, wyznaczane poza modelem, a wpływające na wartości zmiennych endogenicznych. Opóźnione zmienne modelu wielorównaniowego (endogeniczne i egzogeniczne) wraz z bieżącymi zmiennymi egzogenicznymi zaliczane są do grupy zmiennych o wartościach z góry ustalonych. Jeśli model nie zawiera żadnej zmiennej egzogenicznej, to nazywany jest modelem zamkniętym. W praktyce nie buduje się modeli w pełni zamkniętych, ponieważ oznaczałoby to brak wpływu otoczenia na zachowanie modelowanego układu. Modele matematyczne zawierają parametry, to jest współczynniki związane ze zmiennymi modelu. Parametry są na ogół szacowane na podstawie danych statystycznych, przy użyciu odpowiednich technik estymacji. Mogą być również szacowane na podstawie opinii ekspertów lub ustalone w oparciu o normy i relacje techniczne. Zdarza się, że parametry znane są dzięki założeniom teoretycznym, leżącym u postaw konstrukcji modelu. Model stochastyczny to szczególny rodzaj modelu matematycznego, zawierającego przynajmniej jedną zmienną losową. Model deterministyczny (tożsamościowy) odzwierciedla związki typu funkcyjnego.

Ze względu na postać funkcyjną równań modelu wyróżnia się modele liniowe – jeśli wszystkie równania modelu są liniowe względem parametrów, oraz modele nieliniowe – jeśli występują w nich równania nieliniowe względem parametrów.

Ze względu na ujęcie czynnika czasu rozróżnia się modele statyczne i dynamiczne. Model statyczny nie jest zależny w żaden sposób od czasu. Model dynamiczny to taki, w którym wprowadzono czas do równań modelu (może on być wprowadzony bezpośrednio – w postaci zmiennej czasowej, lub pośrednio – przez zmienne opóźnione, przyrosty zmiennych, ich tempa *etc.*). Zastosowanie modeli statycznych ogranicza się do opisania stanu stacjonarnego bądź do analizowania różnic między takimi stanami (statyka porównawcza). Modele dynamiczne natomiast mogą być używane nie tylko do opisywania stanu stacjonarnego i różnic między alternatywnymi stanami (czyli tak jak modele stacjonarne), ale również do opisywania ścieżek czasowych zmiennych ekonomicznych i do analizowania różnic pomiędzy alternatywnymi ścieżkami (dynamika porównawcza), do czego modele statyczne się nie nadają. Modele statyczne można jednak traktować jako szczególny przypadek modeli dynamicznych, a w związku z tym wyniki analizy statycznej zawsze można uznać za tendencje jakiegoś modelu dynamicznego dla dłuższego okresu.

Symbolicznie model o M równaniach zapisać można następująco:

$$y_{it} = g_i(Y_t, Y_{t-1}, ..., Y_{t-k}, Z_t, \Theta_i, u_{it}) \quad (t = 1,..., T)(i = 1,..., M) \tag{15}$$

gdzie:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ ... \\ y_M \end{bmatrix}, \; Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ ... \\ z_N \end{bmatrix}$$

t – subskrypt czasu,
k – maksymalne opóźnienie zmiennych endogenicznych,
y_i – i-ta zmienna endogeniczna,
z_j – j-a zmienna egzogeniczna,
u_i – składnik losowy w i-tym równaniu modelu,
Z – wektor zmiennych egzogenicznych (bieżących i opóźnionych),
Y – wektor zmiennych endogenicznych,
Θ_i – zbiór parametrów i-tego równania.

Powyższy układ równań można zapisać również w postaci macierzowej:

$$Y_t = G(Y_t, Y_{t-1}, ..., Z_t, \Theta, U_t) \tag{16}$$

gdzie $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ ... \\ u_M \end{bmatrix}$, natomiast Θ oznacza zbiór wszystkich parametrów modelu.

Ważne informacje o strukturze powiązań modelu wielorównaniowego zawarte są w tak zwanej macierzy powiązań modelu. Jest to kwadratowa macierz R stopnia M, o następująco zdefiniowanych elementach: $r_{ij} = 1$, gdy zmienna y_j występuje w równaniu objaśniającym zmienną y_i (w i-tym równaniu), zaś $r_{ij} = 0$ w przeciwnym razie (dla $i, j = 1, ..., M$). W przypadku, gdy macierz powiązań jest diagonalna, model nazywamy modelem prostym. Cechą wyróżniającą modele rekurencyjne jest możliwość przekształcenia macierzy R (poprzez zmianę uporządkowania równań lub zmiennych) do postaci macierzy trójkątnej. Jeśli takie przekształcenie jest niemożliwe, mamy do czynienia z modelem współzależnym, to jest modelem z jednoczesnymi sprzężeniami zwrotnymi między zmiennymi endogenicznymi.

Niezmiernie istotny jest wpływ jednostek czasu, używanych w danych będących podstawą do estymacji równań modelu, na specyfikację modelu i typ powiązań między zmiennymi endogenicznymi – im krótsza jednostka czasu, tym mniej równań współzależnych, a więc prostsza struktura ze względu na sprzężenia jednoczesne. Z drugiej jednak strony, bardziej złożona staje się wówczas struktura powiązań dynamicznych (wyrażających procesy adaptacyjne), uwzględnianych w specyfikacji równań przez wprowadzanie zmiennych z opóźnieniami czasowymi.

Ten sam model może być przedstawiony w trzech postaciach: strukturalnej, zredukowanej i końcowej. Postać strukturalna jest ważna z punktu widzenia formułowania modelu i szacowania jego parametrów. Składa się ona z równań wyspecyfikowanych w procesie budowy modelu. Jej równania reprezentują wybrane hipotezy dotyczące praw działania analizowanego systemu.

Model w postaci strukturalnej można zapisać w następującej formie:

$$G(Y_t, Y_{t-1}, ..., Y_{t-k}, Z_t, \Theta) = U_t \tag{17}$$

Postaci zredukowana i końcowa – podobnie jak postać strukturalna, przedstawiają równania modelu w formie jawnej, to jest rozwikłanej względem zmiennych objaśnianych przez te równania. Różnica między nimi tkwi w zestawie zmiennych objaśniających (zapisanych po stronie prawej). W przypadku postaci strukturalnej po prawej stronie mogą występować wszystkie zmienne modelu, to znaczy bieżące zmienne endogeniczne i zmienne z góry ustalone. W postaci zredukowanej występują tam jedynie zmienne z góry ustalone, a w końcowej – wyłącznie zmienne egzogeniczne.

Postać zredukowana modelu powstaje z postaci strukturalnej przez wyeliminowanie sprzężeń jednoczesnych między zmiennymi endogenicznymi. Równanie wektorowe (15) zostaje więc przekształcone do postaci:

$$Y_t = H(Y_{t-1},...,Y_{t-k}, Z_t P_t, V_t) \tag{18}$$

gdzie:

P – macierz parametrów postaci zredukowanej,

V – wektor składników losowych postaci zredukowanej.

Postać zredukowana ma znaczenie głównie z punktu widzenia szacowania parametrów i prognozowania na podstawie modelu. Postać końcową otrzymuje się z postaci zredukowanej przez wyeliminowanie z niej opóźnionych sprzężeń między zmiennymi endogenicznymi:

$$Y_t = \Phi(Z_t, F_t, W_t) \tag{19}$$

gdzie:

F – macierz parametrów postaci końcowej,

W – wektor składników losowych postaci końcowej.

W wyniku takiego przekształcenia po prawej stronie (powyższego) równania zostają jedynie bieżące i opóźnione wartości zmiennych egzogenicznych oraz wektor składników losowych. Postać końcowa ma znaczenie przede wszystkim z punktu widzenia wykorzystania modelu, a więc analizy struktury i symulacji. W przypadku modeli liniowych można za pomocą przekształceń algebraicznych wyprowadzić wzory dla wszystkich parametrów postaci zredukowanej i końcowej zawartych w macierzach *P* i *F*. Parametry te są w tym przypadku stałe (nie zależą od czasu). Parametry postaci końcowej, czyli elementy macierzy *F*, to mnożniki obliczone względem zmiennych egzogenicznych.

Podsumowanie

Modele dynamiczne opisują w sposób jednoznaczny dynamikę zachowań w przestrzeni. Przedstawiają one funkcjonowanie systemu za pomocą układu równań różniczkowych lub różnicowych. Równania te są deterministycznym i funkcyjnym wyrażeniem różnego rodzaju stanów, które zmieniają się w stopniu kontrolowanym przez funkcje decyzyjne. Formuły tego aparatu matematycznego są na tyle elastyczne, że pozwalają na modelowanie ze znaczną swobodą z uwzględnianiem założeń, ograniczeń i nieliniowych reakcji i sprzężeń, charakterystycznych dla różnych systemów. Modele dynamiczne są dobrym narzędziem odzwierciedlania lub naśladowania zachowań systemów i pozwalają wnikać głębiej w te zachowania poprzez różnicowanie parametrów i zmiennych ruchu. Do tego rodzaju sposobów opisu należą wielorównaniowe dynamiczne modele ekonometryczne. Ich stochastyczny charakter nadaje jeszcze większą użyteczność w modelowaniu struktur przestrzenno-czasowych.

Modele budowane są na bazie określonej teorii, która w wielu przypadkach nie jest wystarczająca. Dotyczy to w szczególności budowy równań różniczkowych czy różnicowych (bądź różniczkowo-różnicowych), które bezpośrednio wymagają konkretnych założeń i zwięzłej, jednoznacznej teorii. Równania takie można przetransformować na układy dynamicznych równań ekonometrycznych.

Literatura

Badania przestrzenne rynku i konsumpcji, S. Mynarski S. (red.), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992.

Domański R., *Przestrzenna transformacja gospodarki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997.

Domański R., *Geografia ekonomiczna. Ujęcie dynamiczne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.

Ekonomiczna analiza przestrzenna, C. Ponsard (red.), Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1992.

Hozer J., *Czas i przestrzeń w modelowaniu ekonometrycznym, czyli: tempus, locus, homo, casus et fortuna regit actum*, Rectors Lectures, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 1998.

Jajuga K., *Statystyczna teoria rozpoznawania obrazów*, PWN, Warszawa 1990.

Malisz B., *Podstawy gospodarki i polityki przestrzennej*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław–Warszawa–Kraków Gdańsk–Łódź 1984.
Ostasiewicz W., *Zastosowanie zbiorów rozmytych w ekonomii*, PWN, Warszawa 1986.
Siedlecki J., *Równowaga a wzrost gospodarczy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Wrocław 2000.

ON SELECTED FORMS OF DESCRIBING THE DYNAMICS OF ECONOMIC SPATIAL STRUCTURES

Summary

Space is a notion which is usually understood intuitively. In most cases, however, such an understanding is insufficient to describe or carefully examine this concept. Space is a key notion in many scientific disciplines – they use terms such as public, social and private space. Mathematicians define various types of spaces, for instance the Euclidean space, the Banach space, or the Minkowski space. In fact, each phenomenon is related to space. The use of space

in economics also requires a precise definition of this term. The higher the expectations about a specific application of this term, the more precise definition is required.

In the paper an attempt is made to both approach, in a systematic way, the issues of identification and description of space by means of quantitative methods, and to compare and contrast several methods of modelling the changes in economic spatial structures over time.

Translated by Krzysztof Heberlein

Keywords: economic spatial structures, dynamic models.