

Mariusz Doszyń

Uniwersytet Szczeciński

ZASTOSOWANIE FUNKCJI O STAŁEJ ELASTYCZNOŚCI SUBSTYTUCJI (CES) ORAZ FUNKCJI COBBA-DOUGLASA DO OCENY KONKURENCYJNOŚCI SPÓŁEK NOTOWANYCH NA GIEŁDZIE PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH W WARSZAWIE

STRESZCZENIE

W artykule omówione zostały dwa rodzaje modeli umożliwiające analizowanie wybranych aspektów składających się na konkurencyjność przedsiębiorstw. Przedstawiono funkcję o stałej elastyczności substytucji (CES) i funkcję Cooba-Douglasa oraz scharakteryzowano występujące między nimi różnice. Oszacowano każdą z tych funkcji, a następnie je porównano. Konkurencyjność została zbadana w oparciu o reszty funkcji Cobba-Douglasa, która została oszacowana na podstawie danych dotyczących wybranych spółek notowanych na GPW w Warszawie w 2004 r.

Słowa kluczowe: funkcja o stałej elastyczności substytucji (funkcja CES), funkcja produkcji Cobba-Douglasa, krańcowa stopa technicznej substytucji, elastyczność substytucji, ekonometryczna analiza wpływu czynników subiektywnych, konkurencyjność przedsiębiorstw

Wprowadzenie

Konkurencyjność przedsiębiorstw wiąże się ściśle z efektywnością wykorzystania posiadanych zasobów (czynników produkcji). Sposób transformacji nakładów (zasobów) w efekty zależy nie tylko od czynników, które można określić mianem

obiektywnych, takich jak zasoby majątku, nakłady pracy, stosowane technologie, lecz również od aspektów subiektywnych, związanych z zasobami ludzkimi.

Można postawić hipotezę, że w bardziej konkurencyjnym przedsiębiorstwie osiągnięte są istotnie lepsze wyniki, przy takich samych nakładach (identycznych zasobach majątkowych, takiej samej liczbie roboczogodzin w danym okresie itd.).

Do określania tak rozumianej konkurencyjności przedsiębiorstw można stosować odpowiednio skonstruowane modele ekonometryczne, w tym m.in. funkcję o stałej elastyczności substytucji (CES) oraz funkcję Cobba-Douglasa¹. Wartości teoretyczne otrzymane na podstawie tego typu modeli ekonometrycznych pozwalają ustalić, jaki powinien być poziom produkcji (przychodów) w „typowym” przedsiębiorstwie. Przez typowe rozumie się przedsiębiorstwo osiągające wyniki (przychody) na poziomie wartości oczekiwanej, przy danych wartościach zmiennych objaśniających. Jeżeli reszta uzyskana dla danego przedsiębiorstwa jest dodatnia (oraz statystycznie istotna), świadczy to o lepszym wykorzystywaniu zasobów na tle innych, wziętych pod uwagę przedsiębiorstw, co może wynikać z lepszego gospodarowania. Z kolei sama gospodarność zależy od „jakości” pracowników przedsiębiorstwa, na każdym jego szczeblu. Czynniki intrapersonalne oraz interpersonalne składają się na „klimat” panujący w przedsiębiorstwie, który zależy od czynników subiektywnych (w podanym wyżej znaczeniu). Celem artykułu jest pokazanie, w jaki sposób, za pomocą narzędzi ekonometrycznych, można analizować wpływ czynników subiektywnych.

1. Metodologia badań

Co to jest elastyczność substytucji? W zaprezentowanych poniżej modelach elastyczność substytucji to względna zmiana krańcowej stopy substytucji zatrudnienia (l_i) przez aktywa trwałe (m_i) podzielona przez względną zmianę relacji aktywów trwałych do zatrudnienia:

$$E_{ml} = \frac{\partial(\partial m / \partial l) / (\partial m / \partial l)}{\partial(m / l) / (m / l)} \quad (1)$$

¹ Jest to podejście analogiczne do tego, które zaproponował prof. J. Hozer, badając gospodarność przedsiębiorstw na podstawie reszt odpowiednio skonstruowanego modelu ekonometrycznego, por. J. Hozer, *Mikroekonometria. Analiz, diagnozy, prognozy*, PWE, Warszawa 1993, s. 98 i n.

Oznaczmy krańcową stopę technicznej substytucji przez $MRTS = \partial m / \partial l$. Krańcowa stopa substytucji mówi, o ile należy zwiększyć aktywa trwałe, gdy zatrudnienie maleje o jednostkę, aby przychody nie uległy zmianie.

W tym miejscu konieczny jest komentarz. Krańcowa stopa substytucji technicznej oraz elastyczność substytucji dotyczą wielkości produkcji, a wielkość produkcji to zmienna będąca wielkością fizyczną. Przychody są wyrażane wartościowo i zależą od poziomu cen. Jeżeli ceny się zmieniają, to w przypadku (1) nie jest dodatkowo spełnione założenie *ceteris paribus*. Przyjęcie przychodów za zmienną objaśnianą było podyktowane po części dostępnością danych statystycznych oraz zróżnicowaniem asortymentu produkcji analizowanych spółek.

Jeżeli aktywa trwałe przypadające na zatrudnionego oznaczymy przez $k = m / l$, to elastyczność substytucji można również zapisać jako:

$$E_{ml} = \frac{\partial MRTS / MRTS}{\partial k / k} \quad (2)$$

W przypadku funkcji CES elastyczność substytucji jest stała, natomiast w przypadku funkcji Cobba-Douglasa elastyczność substytucji jest równa jeden, co łatwo wykazać.

Dwuczynnikową funkcję CES można zapisać w następującej postaci:

$$p_i = (\alpha_1 m_i^\rho + \alpha_2 l_i^\rho)^{v/\rho} e^{\xi_i} \quad (3)$$

gdzie:

- p_i – przychody netto ze sprzedaży produktów, towarów i materiałów w i -tym przedsiębiorstwie (w danym okresie),
- m_i – aktywa trwałe w i -tym przedsiębiorstwie (w danym okresie),
- l_i – zatrudnienie w i -tym przedsiębiorstwie (w danym okresie),
- $\alpha_1, \alpha_2, \rho, v$ – parametry, $\alpha_1, \alpha_2, v > 0$, $\rho \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$,
- ξ_i – składnik losowy.

Jak widać model (3) będzie szacowany dla danych przekrojowych. W literaturze funkcję CES najczęściej zapisuje się jako: $p_i = \gamma [\delta m_i^{-\rho} + (1 - \delta) l_i^{-\rho}]^{-v/\rho} e^{\xi_i}$, gdzie $\gamma, v > 0$, $\delta \in (0, 1)$ oraz $\rho \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. W zapisie tym przyjmuje się jednak

pewne dowolne, aprioryczne założenia o parametrze dystrybucji δ oraz występują problemy z interpretacją parametru γ^2 .

Model (3) jest modelem nieliniowym, zarówno względem zmiennych, jak i parametrów. Nie istnieje również transformacja przekształcająca model (3) w model liniowy względem parametrów, w związku z czym do jego estymacji nie można zastosować metody najmniejszych kwadratów (MNK).

Jednym ze sposobów estymacji tego typu modeli, często opisywanym w literaturze, jest metoda pochodząca od Jana Kmęty. Polega ona na zlogarytmowaniu modelu (3) stronami:

$$\ln p_i = \frac{v}{\rho} \ln (\alpha_1 m_i^\rho + \alpha_2 l_i^\rho) + \xi_i \quad (4)$$

a następnie na rozwinięciu wyrażenia $\phi(\rho) = \ln (\alpha_1 m_i^\rho + \alpha_2 l_i^\rho)$ w szereg Taylora wokół $\rho = 0$ do drugiej pochodnej włącznie:

$$\phi(\rho) \approx \phi(0) + \rho \phi'(0) + 1/2 \cdot \rho^2 \phi''(0) \quad (5)$$

Można sprawdzić, że³:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \ln(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \phi'(0) &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \ln m_i + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \ln l_i \\ \phi''(0) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} (\ln m_i - \ln l_i)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

² Por. A. Goryl, Z. Jędrzejczyk, K. Kukuła, J. Osiewalski, A. Walkosz, *Wprowadzenie do ekonometrii w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa 1999.

³ *Ibidem*, s. 165.

Podstawiając (6) do (5), a następnie (5) do (4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \ln p_i = & \underbrace{\frac{v}{\rho} \ln(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\beta_0} + \underbrace{\frac{\alpha_1 v}{\alpha_1 + \alpha_2}}_{\beta_1} \underbrace{\ln m_i}_{x_{1i}} + \underbrace{\frac{\alpha_2 v}{\alpha_1 + \alpha_2}}_{\beta_2} \underbrace{\ln l_i}_{x_{2i}} + \\ & + \underbrace{\frac{\alpha_1 \alpha_2 v \rho}{2(\alpha_1 + \alpha_2)^2}}_{\beta_3} \underbrace{(\ln m_i - \ln l_i)^2}_{x_{3i}} + \xi_i \end{aligned} \quad (7)$$

czyli

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \xi_i. \quad (8)$$

Model (8) szacuje się MNK. Parametry modelu (3) wyznacza się na podstawie następujących zależności⁴:

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 + \beta_2 \\ \rho &= \frac{2\beta_3(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1\beta_2} \\ \alpha_1 &= \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \exp\left(\frac{2\beta_0\beta_3}{\beta_1\beta_2}\right) \\ \alpha_2 &= \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \exp\left(\frac{2\beta_0\beta_3}{\beta_1\beta_2}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

Drugim z szacowanych modeli będzie funkcja Cobba-Douglasa:

$$p_i = \alpha_0 m_i^{\alpha_1} l_i^{\alpha_2} e^{\xi_i} \quad (10)$$

Jest to funkcja potęgowa, którą po obustronnym zlogarytmowaniu można oszacować MNK.

Nasuwa się następujące pytanie: kiedy należy szacować funkcję CES, a kiedy funkcję Cobba-Douglasa? Tego typu dylematy powinno się rozstrzygać metodami statystyczno-ekonometrycznymi. W przypadku funkcji Cobba-Douglasa elastyczność

⁴ *Ibidem*, s. 166.

substytucji jest równa 1, w przypadku funkcji CES – nie musi koniecznie tak być. Funkcja Cobba-Douglasa jest zatem szczególnym przypadkiem funkcji typu CES.

2. Przykład empiryczny

W przykładzie empirycznym oszacowano każdą z omawianych funkcji. Dane dotyczą spółek przemysłu elektromaszynowego notowanych na GPW w Warszawie w 2004 r. Za zmienną objaśnianą przyjęto przychody netto ze sprzedaży produktów, towarów i materiałów (p_i). Zmienne objaśniające to aktywa trwałe (m_i) oraz liczba zatrudnionych (l_i). Przychody netto oraz aktywa trwałe zostały wyrażone w tys. zł, w cenach z 2008 r.

Funkcja CES (8) w postaci po zlogarytmowaniu kształtuje się następująco⁵:

$$\hat{y}_i = 9,263 - 2,660x_{1i} + 3,732x_{2i} + 0,370x_{3i} \quad (11)$$

(2,241) (-1,337) (1,873) (1,543)

Model (11) jest dość dobrze dopasowany do wartości empirycznych. Skorygowany współczynnik determinacji $\bar{R}^2 = 0,88$ ⁶.

Wartość krytyczna testu t – studenta odczytana dla poziomu istotności $\alpha = 0,1$ jest równa $t_{0,05;14} = 1,761$. Zatem aż dwie oceny parametrów okazały się nieistotne statystycznie. Z kolei na podstawie testu F można stwierdzić, że przy tym samym co poprzednio poziomie istotności łączny wpływ uwzględnionych zmiennych objaśniających jest istotny statystycznie. Wartość statystyki $F_{3;14} = 42,38$ jest bowiem większa od wartości krytycznej $F_{0,05;3;14} = 3,344$. Błąd standardowy reszt $S_e = 0,417$.

Na podstawie zależności (9) otrzymujemy funkcję CES w następującej postaci:

$$\hat{p}_i = \left(-1,244m_i^{-0,08} + 1,745l_i^{-0,08} \right)^{-1,072/0,08} \quad (12)$$

⁵ W tym i następujących przypadkach w nawiasach pod ocenami parametrów podane są wartości statystyk t -Studenta.

⁶ W przypadku skorygowanego współczynnika determinacji, poza udziałem zmienności wyjaśnianej przez model w ogólnej zmienności zjawiska uwzględnia się również liczbę stopni swobody. Opis stosowanych miar ekonometrycznych zawierają na przykład prace: *Ekonometria*, red. J. Hozer, Katedra Ekonometrii i Statystyki Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1997; G.S. Maddala, *Ekonometria*, PWN, Warszawa 2006.

Ocena parametru $\hat{\rho} = -0,08$ charakteryzuje elastyczność substytucji zatrudnienia (l_i) przez aktywa trwałe (m_i). Elastyczność ta wyrażona jest wzorem $\varepsilon_{ml} = 1 / (1 - \rho) = 0,926$. Jeżeli zatem spadek relacji aktywów trwałych do zatrudnienia o 1% jest rekompensowany wzrostem krańcowej stopy technicznej substytucji o 0,926%, to przychody netto pozostaną na dotychczasowym poziomie. Ocena parametru $\hat{\nu} = 1,072$ wskazuje na to, że wzrost czynników produkcji o 1% spowoduje wzrost przychodów netto o ok. 1,072%. Z kolei ocena parametru $\hat{\alpha}_1 = -1,244$ jest traktowana jako miernik intensywności kapitałowej („majątkowej”) stosowanej technologii⁷. Zgodnie z przyjmowanymi założeniami parametr ten nie powinien być ujemny, a ma to miejsce w omawianym przypadku. Może to świadczyć o nieefektywnym w pełni wykorzystywaniu nakładów majątkowych.

Dla porównania oszacowano również funkcję Cobba-Douglasa (10), która w postaci po zlogarytmowaniu wygląda następująco:

$$\ln \hat{p}_i = 3,023 + 0,395 \ln m_i + 0,684 l_i \quad (13)$$

(3,388)
(1,919)
(2,474)

Model (13) jest również dobrze dopasowany do wartości empirycznych (skorygowany współczynnik determinacji $\bar{R}^2 = 0,88$). Inaczej niż w przypadku funkcji CES, przy poziomie istotności $\alpha = 0,1$ wszystkie oceny parametrów są istotne statystycznie. Wartość krytyczna testu *t*-Studenta odczytana dla poziomu istotności $\alpha = 0,1$ jest równa $t_{0,05;15} = 1,753$. Test *F* także wskazuje na to, że przy tym samym jak poprzednim poziomie istotności łączny wpływ zmiennych objaśniających jest istotny statystycznie ($F_{2;15} = 57,122$ jest większe od wartości krytycznej $F_{0,05;3;14} = 3,682$). Błąd standardowy reszt wyniósł $S_e = 0,436$.

Po odlogarytmowaniu funkcja Cobba-Douglasa wygląda następująco:

$$\hat{p}_i = 20,553 m_i^{0,395} l_i^{0,684} \quad (14)$$

Jak powszechnie wiadomo, wykładniki funkcji potęgowej są jednocześnie elastycznościami zmiennych objaśniających względem zmiennej objaśnianej. Można zatem stwierdzić, że wzrost aktywów trwałych o 1% powoduje wzrost przycho-

⁷ Podane interpretacje podaje się odnośnie do postaci modeli CES z wyrazem wolnym oraz przy spełnieniu założenia, że $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. W oszacowanym modelu (12) wyraz wolny nie występuje i nie jest spełnione założenie o sumowaniu się wspomnianych parametrów do jedności.

dów netto średnio o 0,395%, *ceteris paribus*. W przypadku zatrudnienia jego 1% wzrost przyczyniał się do wzrostu przychodów netto przeciętnie o 0,684%, *ceteris paribus*.

W związku z tym, że w modelu CES (11) zmienne były nieistotne statystycznie, do oceny konkurencyjności spółek zastosowano reszty uzyskane na podstawie funkcji Cobba-Douglasa (13). Warto również zauważyć, że elastyczność substytucji wyznaczona na podstawie funkcji CES wyniosła 0,926. Jest to wartość bliska jedności, a jak wiadomo, funkcja Cobba-Douglasa szacowana jest przy założeniu, że elastyczność substytucji jest równa 1.

Odlogarytmowane reszty dla analizowanych spółek przedstawione zostały w tabeli 1 oraz na wykresie 1⁸.

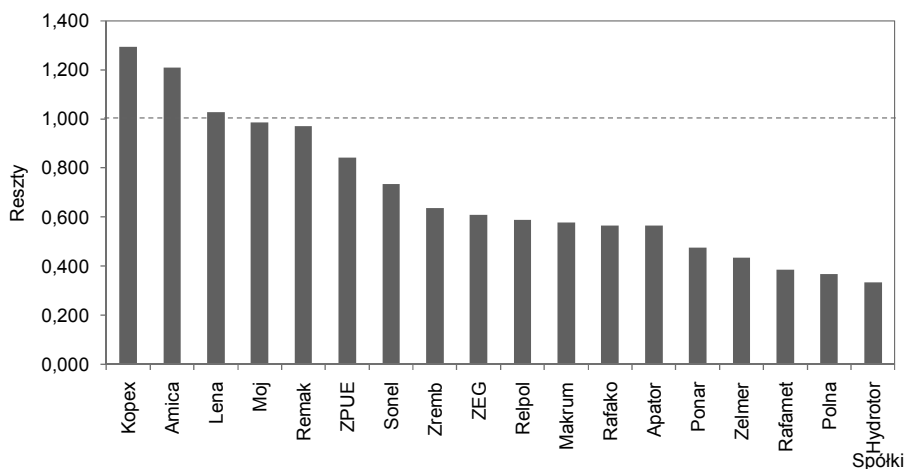
Tabela 1. Reszty wyznaczone na podstawie funkcji Cobba-Douglasa dla spółek przemysłu elektromaszynowego notowanych na GPW w Warszawie w 2004 r.

Spółki	Reszty	Spółki	Reszty
Kopex	1,293	Relpol	0,587
Amica Wronki	1,209	Makrum	0,578
Lena Lighting	1,026	Rafako	0,565
Moj	0,986	Apator	0,564
Remak	0,971	Ponar Wadowice	0,476
ZPUE	0,841	Zelmer	0,435
Sonel	0,736	Rafamet	0,385
Zremb Chojnice	0,638	Polna	0,368
ZEG	0,608	Hydrotor	0,335

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z serwisu Notoria.

⁸ Są to reszty nakładające się multiplikatywnie, co pokazuje wzór (10).

Wykres 1. Reszty wyznaczone na podstawie funkcji Cobba-Douglasa dla spółek przemysłu elektromaszynowego notowanych na GPW w Warszawie w 2004 r.



Źródło: opracowanie własne na podstawie tabeli 1.

Zgodnie z postawioną hipotezą bardziej konkurencyjne są te spółki, które osiągały większe przychody (dla danych aktywów trwałych i danej liczby zatrudnionych). W rankingu konkurencyjności na najkorzystniejszych pozycjach uplasowały się trzy spółki: Kopex, Amica Wronki oraz Lena Lighting. W przypadku tych spółek reszty były większe od jedności. Spółka Kopex osiągała przychody większe o 29,3% od wynikających z oszacowanego modelu, Amica Wronki – o 20,9%, natomiast Lena Lighting – o 2,6%. Pozostałe spółki osiągały przychody mniejsze od spodziewanych (wynikających z modelu). Najmniej konkurencyjne spółki to Hydrotor, Polna oraz Rafamet. W spółkach tych przychody netto były mniejsze od „oczekiwanych” odpowiednio o 66,5%, 63,2% oraz 61,5%.

Podsumowanie

Reasumując, można przyjąć, że bardziej konkurencyjne spółki to te, które osiągały lepsze rezultaty w identycznych okolicznościach (przy takich samych nakładach majątkowych i takim samym zatrudnieniu). W związku z tym do badania konkurencyjności spółek można stosować resztę odpowiednio zbudowanych modeli ekonometrycznych.

W artykule porównane zostały dwa rodzaje modeli: funkcja o stałej elastyczności substytucji (CES) oraz funkcja Cobba-Douglasa. Stosowanie każdego z tych modeli wiąże się z szeregiem zalet i wad. Funkcja CES jest uogólnieniem funkcji Cobba-Douglasa, a więc bez wątpienia odnosi się do szerszej klasy przypadków. Z kolei funkcja Cobba-Douglasa ma bardziej prostą i uzasadnioną teoretycznie interpretację. To, który model powinien być stosowany, należy rozstrzygać metodami statystyczno-ekonometrycznymi. Taka też procedura została przyjęta w niniejszym zadaniu.

Funkcja CES oraz funkcja Cobba-Douglasa w zbliżonym stopniu opisywały kształtowanie się przychodów netto w analizowanych spółkach. W związku z tym, że w przypadku funkcji CES oceny parametrów nie były (poza wyrazem wolnym) istotne statystycznie do oceny konkurencyjności na podstawie reszt zastosowano funkcję Cobba-Douglasa. W ostatnim etapie spółki zostały uporządkowane według stopnia konkurencyjności. Trzy najbardziej konkurencyjne w analizowanym sektorze w 2004 r. spółki to: Kopex, Amica Wronki oraz Lena Lighting.

Literatura

- Czerwiński Z., *Matematyka na usługach ekonomii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań 2011.
- Ekonometria*, red. J. Hozer, Katedra Ekonometrii i Statystyki Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1997.
- Goryl A., Jędrzejczyk Z., Kukuła K., Osiewalski J., Walkosz A., *Wprowadzenie do ekonometrii w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa 1999.
- Greene W., *Econometric analysis*, Fifth Edition, Prentice Hall 2003.
- Hozer J., *Mikroekonometria. Analizy diagnozy, prognozy*, PWE, Warszawa 1993.
- Maddala G.S., *Ekonometria*, PWN, Warszawa 2006.
- Theil H., *Zasady ekonometrii*, PWN, Warszawa 1979.

**APPLICATION OF CONSTANT ELASTICITY OF SUBSTITUTION
AND COBB-DOUGLAS FUNCTIONS IN ANALYZING COMPETITIVENESS
OF COMPANIES REGISTERED ON WARSAW STOCK MARKET**

Summary

In the article two types of econometric models in context of analysis of competitiveness of stock companies were discussed. Constant Elasticity of Substitution and Cobb-Douglas functions were presented and differences between them were also emphasized. Two types of functions were estimated and compared. Competitiveness was evaluated on the basis of residuals of Cobb-Douglas function for chosen stock companies in 2004.

Translated by Mariusz Doszyń

Keywords: CES production function, Cobb-Douglas production function, marginal rate of technical substitution, elasticity of substitution, econometric analysis of impact of subjective factors, competitiveness

