STUDIA I PRACE
WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 2

AGNIESZKA MAJEWSKA
Uniwersytet Szczeciński

PORÓWNANIE METOD SZACOWANIA ZMIENNOŚCI CEN WALORÓW BAZOWYCH OPCJI

Wprowadzenie

Zmienność, czasami określana również chwiejnością, od angielskiego słowa *volatility*, jest analizowana przez większość inwestorów, którzy angażują swoje środki zarówno w instrumenty rynku natychmiastowego jak i terminowego. Mówi bowiem, jaki jest możliwy przeciętny wzrost bądź spadek ceny danego waloru, a więc jest miarą niepewności co do przyszłych zmian jego cen. Należy zaznaczyć, że wraz ze wzrostem zmienności rośnie zarówno prawdopodobieństwo korzystnej, jak i niekorzystnej zmiany ceny. Dla posiadacza opcji kupna zysk będzie się zwiększał wraz ze wzrostem ceny waloru bazowego, natomiast dla właściciela opcji sprzedaży – wraz ze spadkiem. W obu przypadkach będzie tym wyższy, im większą zmiennością będą charakteryzowały się walory bazowe.

Przyczyn zmienności jedni doszukują się w informacjach docierających do inwestorów, a inni w samym fakcie zawierania transakcji. Pierwsi, broniący hipotezy efektywności rynku, uważają, że przypadkowe wiadomości odbierane przez inwestorów wpływają na przyszłe stopy zwrotu, a co za tym idzie, na zmienność walorów. Drudzy natomiast są zdania, że jest ona przede wszystkim efektem rynkowego obrotu walorami.

Celem artykułu jest porównanie metod szacowania zmienności cen walorów bazowych opcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Analizie poddano dwie grupy metod: wykorzystujące dane historyczne i wynikową. Wśród pierwszych wyróżnić można najczęściej wykorzystywane przez inwestorów odchylenie standardowe oraz bardziej skomplikowane metody oparte na procesach *ARCH*, *GARCH* czy *EWMA*.

1. Zmienność wyznaczana jako odchylenie standardowe

Najczęściej wykorzystywanym przez inwestorów i zarazem najprostszym sposobem wyznaczania zmienności jest metoda historyczna, polegająca na statystycznej estymacji wariancji cen danego waloru, z której wyznacza się odchylenie standardowe. W celu wyznaczania względnych zmian cen instrumentów do szacowania zmienności wykorzystuje się logarytmy naturalne ze względnych przyrostów cen danego instrumentu, co można zapisać następująco[1]:

$$s_p = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2} \tag{1}$$

gdzie u_i – logarytmiczna stopa zwrotu cen analizowanych walorów.

Do otrzymania zmienności rocznej (σ) z odchylenia standardowego (s_p), liczonego dla wybranego okresu, wykorzystuje się następujący wzór:

$$\sigma = s_p\sqrt{Y} \tag{2}$$

gdzie Y – liczba rozpatrywanych okresów w roku.

Do najczęściej wykorzystywanych czynników czasowych zalicza się następujące:

– dzienny, uwzględniający dni kalendarzowe: $\sqrt{365}$,
– dzienny, uwzględniający dni notowań: $\sqrt{250}$, $\sqrt{252}$ lub $\sqrt{260}$,
– tygodniowy: $\sqrt{52}$,
– miesięczny: $\sqrt{12}$,
– kwartalny: $\sqrt{4}$.

[1] Por. [1], s. 23–28.

Głównym problemem pojawiającym się przy wyznaczaniu estymatora zmienności historycznej jest długość przedziału czasowego, który należy uwzględnić. Na ogół precyzja pomiaru zmienności jest tym większa, im więcej informacji zostanie uwzględnionych w szacunku. Wydłużenie okresu estymacji, gdzie uwzględnia się zdarzenia „zbyt historyczne", może jednak doprowadzić do błędnego oszacowania, w którym wpływ nowych wydarzeń jest zmniejszany przez te bardzo odległe. C. Butler nazywa to efektem cienia[2]. Dodatkowo różne wyniki uzyskuje się przez szacowanie zmienności na podstawie dni kalendarzowych i roboczych. Konieczne jest zbadanie, czy występuje dodatkowe ryzyko wolnych dni.

2. Zmienność wyznaczana w oparciu o procesy *ARCH* i *GARCH*

Badania K. Kronera, K.P. Kneafsey'ego i S. Claessensa[3] dowodzą, że najnowsze procedury prognozowania na podstawie danych historycznych, zakładające niestałość wariancji (*ARCH*, *GARCH*), charakteryzują się większą precyzją niż zmienność wyznaczana klasycznie jako odchylenie standardowe.

Za prekursora modeli dynamicznych uwzględniających zmienność wariancji uznaje się R. Engla, który w 1982 roku rozwinął pierwszy z nich *ARCH* (*autoregressive conditional heteroscedascity*)[4]. Jest to proces oparty na założeniu autoregresji stóp zwrotu badanego instrumentu finansowego. Główne założenie procesu mówi o tym, że wartość stopy zwrotu w badanym okresie jest funkcją stóp zwrotu w okresach wcześniejszych. Ogólnie proces można zapisać następująco[5]:

$$Z_t = f(Z_{t-1}, Z_{t-2}, ...) \tag{3}$$

z czego wynika:

$$h_t = c_0 + \sum_{i=1}^{q} c_i \cdot Z_{t-i}^2 \tag{4}$$

2 Zob. [4], s. 209.
3 Zob. [9].
4 Zob. [6], s. 987–1008.
5 Zob. [13].

zatem można zapisać, że:

$$Z_t = \sqrt{h_t \cdot \varepsilon} \tag{5}$$

gdzie:

Z_t – szacowane warunkowe odchylenia standardowe stóp zwrotu w okresie t,

Z_{t-i} – warunkowe odchylenia standardowe opóźnione w stosunku do okresu t o i,

h_t – szacowana warunkowa wariancja stóp zwrotu w okresie t,

c_i – współczynniki regresji modelu,

q – stopień modelu.

Gdy oszacowane parametry modelu $ARCH(1)$ są dodatnie oraz $\varepsilon_t \in N(0,1)$ i jest niezależne od Z_t, to ε_t jest białym szumem.

Estymacji parametrów modelu $ARCH(q)$ można dokonywać metodą największej wiarygodności. Dla badanej próby stóp zwrotu od Z_1 do Z_N należy zmaksymalizować następującą funkcję[6]:

$$\ln L = -\frac{N}{2} \cdot \ln 2\pi - \frac{1}{2} \cdot \sum_{t=1}^{N} \ln h_t(c) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{t=1}^{N} \frac{Z_t^2}{h_t(c)} \tag{6}$$

gdzie:

lnL – logarytm funkcji wiarygodności,

$h_t(c)$ – szacowana funkcja wariancji warunkowej z parametrami c_i.

Model ma tym większe wartości, im większa wartość q zostanie przyjęta do budowy modelu. Wiąże się to z mnogością szacowanych parametrów funkcji, a zatem wzrasta prawdopodobieństwo popełniania błędów dokładności szacunków. W celu wyeliminowania takiej zależności do funkcji celu można dodać warunki brzegowe, tworząc w ten sposób podstawy optymalizacji modelu. Warunkami takimi mogą być kryteria Akaikego [1974] – $AIC(q)$, lub Schwarza [1978] – $SC(q)$[7]:

---

[6] Zob. [16], s. 302.

[7] Zob. *ibidem*, s. 303.

$$\begin{aligned} AIC(q) &= -2 \cdot \ln L + 2 \cdot q \\ SC(q) &= -2 \cdot \ln L + q \cdot \ln N \end{aligned} \tag{7}$$

W obu tych kryteriach należy dążyć do uzyskania jak najmniejszej wartości $AIC(q)$ i $SC(q)$.

W modelach *ARCH* często zdarza się jednak, że nie można uniknąć problemu związanego z najlepszym dopasowaniem modelu przy dużych wartościach q. Jest to przyczyną powstania modeli uogólnionych *GARCH* (*Generalised AutoRegressive Conditional Heteroscedastic*). Po raz pierwszy *GARCH*(p, q) został zaproponowany w 1986 roku przez ucznia R.F. Engla, T. Bollersleva. Jego zasadniczą postać można przedstawić za pomocą funkcji[8]:

$$h_t = c_0 + \sum_{i=1}^{q} c_i \cdot Z_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} b_i \cdot h_{t-i} \tag{8}$$

gdzie c_i i b_i – dodatnie.

W tej sytuacji należy zaznaczyć, że warunkowa wariancja h_t zależy nie tylko od poprzednich wartości szeregu, ale również od wariancji warunkowych h_{t-i}. Estymacji tego modelu dokonuje się na podstawie metod analogicznych do estymacji *ARCH*, na przykład metody największej wiarygodności.

3. Zmienność wyznaczana w oparciu o proces *EWMA*

Mniej skomplikowane w zastosowaniu od procedur *ARCH* i *GARCH*, a dające równie dużą dokładność, jest podejście wykorzystujące wykładnicze średnie ruchome, tak zwane *EWMA* (*Exponentialy Weighted Moving Average*), które zostało opracowane i jest stosowane przez amerykański bank J.P. Morgan pod ogólną nazwą RiskMetrics[9]. Polega ono przypisaniu średnim ruchomym wykładniczego systemu wag, co powoduje, że przyszłe prognozy opierają się na najbardziej aktualnych danych i nie są zniekształcane przez nieaktualne bądź historycznie nieistotne. Wygładzanie za pomocą funkcji wykładniczej nadaje zatem

[8] Zob. *ibidem*.
[9] Por. [14].

bieżącym danym wyższe wagi niż zdezaktualizowanym. Zmienność otrzymywaną na podstawie algorytmu *EWMA* opisuje następująca formuła rekurencyjna[10]:

$$\sigma_{t+1} = \sqrt{(1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i r_{t-i}} = \sqrt{\lambda\sigma^2 + (1-\lambda) r_t^2} \tag{9}$$

gdzie:

λ – parametr wagowy (współczynnik wykładniczy),

r_t – logarytm naturalny zmiany ceny danego instrumentu.

W odniesieniu do parametru r_t zakłożono, że[11]:

– wariancje cechy $\{r_t\}$ są heteroscedastyczne i zautokorelowane,
– kowariancje cech $\{r_{it}\}$ są zautokorelowane i mają własności dynamiczne,
– rozkłady cech $\{r_{it}\}$ można aproksymować rozkładem normalnym,
– w modelach dynamiki, dla krótkich okresów można założyć, że wartość oczekiwana zmiany jest równa zeru.

Praktycznym problemem pojawiającym się przy korzystaniu z algorytmu *EWMA* jest określenie początkowej wariancji szeregu czasowego. Niezbędne jest do tego wyznaczenie minimalnej liczby obserwacji, na których podstawie będzie ona szacowana. W tym celu stosuje się metrykę[12]:

$$\Omega_K^{\infty} = (1-\lambda)\sum_{t=K}^{\infty} \lambda^t \tag{10}$$

Przyrównując Ω_K^{∞} do poziomu tolerancji λ_L, po rozwiązaniu równania (10) ze względu na K otrzymuje się efektywną liczbę obserwacji niezbędną do wyznaczenia poczatkowej wariancji:

$$K = \frac{\ln \lambda_L}{\ln \lambda} \tag{11}$$

[10] Zob. [7].
[11] Zob. [8], s. 12.
[12] Zob. [7].

Współczynnik wagowy λ, często określany jako czynnik wygasania, ustalany jest indywidualnie. Twórcy RiskMetrics jego wartość dla danych dziennych ustalili na poziomie 0,94, a dla danych miesięcznych – 0,97. Swoje obliczenia oparli na metodzie statystycznej znanej jako „błąd metody najmniejszych kwadratów”[13]. Na podstawie tej metody, parametr λ ma minimalizować średni błąd kwadratowy prognozy (*Root Mean Square Error*):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(r_{t+1}^2 - \hat{\sigma}_{t+1/t}^2(\lambda)\right)^2} \tag{12}$$

gdzie:

T – liczba budowanych prognoz,

$\hat{\sigma}_{t+1/t}^2$ – prognoza wariancji na okres $t + 1$ sporządzona w okresie t przy danym parametrze λ.

W praktyce optymalną wielkość czynnika wagowego określa się w sposób iteracyjny przez szukanie najmniejszych wielkości *RMSE* dla różnych wartości λ. Wagi otrzymane przez twórców RiskMetrics zostały skrytykowane przez C. Alexander, której zdaniem waga równa 0,97 może wzmocnić efekt cienia, a nie osłabić[14]. W rezultacie pojedyncze zawirowania na rynku kapitałowym są uwzględniane w prognozowanych wartościach przez dłuższy czas. Efekt cienia w znacznym stopniu ogranicza utrzymywanie współczynnika wykładniczego na niskim poziomie, między 0,5 a 0,7. Ma to jednak dużą wadę – występuje błąd w próbkowaniu, przejawiający się w oparciu prognozy wyłącznie na najnowszych danych.

4. Implikowany parametr zmienności

Implikowany parametr zmienności, w przeciwieństwie do wcześniej opisanych metod, jest wyznaczany na podstawie bieżących danych, dlatego często określa się go jako zmienność przyszłą lub wynikową[15]. Pierwsze wzmianki o tej

[13] Zob. [14], s. 90–100.
[14] Zob. [2], s. 237.
[15] Zob. [5], s. 174–176.

metodzie można znaleźć w pracach H.A. Latané i R.J. Rendlemana[16] oraz R. Schmalensee i R.A. Trippi'ego[17]. W metodzie tej wykorzystuje się równanie określające cenę opcji, czyli opiera się zarówno na instrumentach rynku natychmiastowego jak i terminowego. Traktując zmienność jako niewiadomą, przy pozostałych wszystkich elementach dokładnie określonych, wyznacza się tak zwany implikowany parametr zmienności wynikający z rynkowej ceny opcji. Można go przedstawić jako funkcję ceny opcji, ceny wykonania, ceny waloru bazowego, czasu i stopy procentowej: $\sigma = f(v, S, X, t, r)$. Dla opcji akcyjnych dodatkową zmienną jest dywidenda, a dla walutowych – zagraniczna stopa procentowa wolna od ryzyka.

Wyznaczając zmienność na podstawie modelu Blacka-Scholesa, iteracyjnie wyszukuje się najlepsze rozwiązanie dla równania opisującego cenę opcji kupna (c) lub sprzedaży (p) w dowolnej chwili t[18]:

$$c = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{13}$$

$$p = X \cdot e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S \cdot N(-d_1) \tag{14}$$

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)\cdot(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)\cdot(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)},$$

S – wartość waloru bazowego w chwili t,
X – cena wykonania opcji,
r – krajowa stopa procentowa wolna od ryzyka,
T – okres ważności opcji,
σ – zmienność ceny waloru bazowego,
$N(x)$ – dystrybuanta standaryzowanej zmiennej o rozkładzie normalnym.

[16] Zob. [10], s. 369–381.
[17] Zob. [15], s. 129–147.
[18] Zob. [3].

W przypadku zmienności implikowanej największą wadą jest niedoskonałość modeli wyceny, które mogą zafałszować cenę opcji, a tym samym szacunek zmienności. Konsekwencją niespełnienia pewnych ich założeń oraz braku przejrzystości danych, jak podaje C. Butler[19], są następujące słabości:

a) założenie o stałości wariancji pomija zmienność samej zmienności;
b) uwzględnienie marży zysku i kosztu zawarcia transakcji powoduje przeszacowanie opcji, co prowadzi do wyższego poziomu zmienności od rzeczywiście występującej;
c) zmienność jest wyznaczana dla konkretnego dnia i często nie powinno się jej przenosić na dłuższe okresy;
d) występuje ograniczona liczba opcji giełdowych, na których podstawie można szacować zmienność.

W wyniku niedoskonałości modeli wyceny pojawia się efekt nazywany „uśmiechem *volatility*". Polega on na tym, że wartość implikowanego parametru zmienności dla opcji mocno *out-of-the-money* jest nieco wyższa niż zmienność dla opcji *at-the-money*.

Pomimo wielu ograniczeń, uważa się, że jakość danych otrzymywanych przez kalkulację zmienności implikowanej jest lepsza niż proste procedury dla danych historycznych. Zasadne jest zatem ich stosowanie zawsze wtedy, gdy tylko są osiągalne. Nie oznacza to jednak, że zmienności szacowane na podstawie danych historycznych nie mogą być precyzyjne, czego dowiodły wspominane badania K. Kronera, K.P. Kneafsey'ego i S. Claessensa.

5. Badanie empiryczne

Porównanie metod szacowania zmienności objęło indeks WIG 20. Wybór instrumentu był podyktowany najdłuższą historią opcji indeksowych, które występują w obrocie na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie od 20 września 2003 roku. W porównaniu z opcjami akcyjnymi, które zostały wprowadzone do obrotu 17 października 2005 roku, charakteryzują się większą liczbą notowań, co ma szczególne znaczenie przy wyznaczaniu implikowanego parametru zmienności. Określając zmienność na podstawie danych historycznych, zgodnie z wcześniej prowadzonymi badaniami przyjęto, że:

---

[19] Zob. [4], s. 205–207.

a) zmienność roczna jest szacowana na podstawie dni notowań[20];
b) zmienność szacowano na podstawie półrocznego okresu; wyniki przeprowadzonych badań dla walorów bazowych analizowanych instrumentów pochodnych wskazują, że zasadne jest przyjęcie $n = 180$[21].

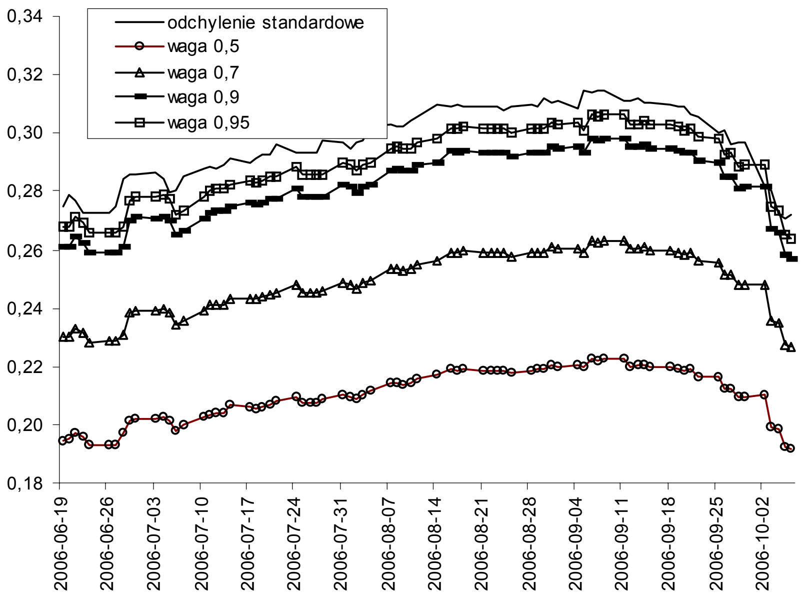
Do wyznaczenia zmienności według procedury *EWMA* przyjęto cztery poziomy parametru wagowego λ: 0,95, 0,90, 0,70, 0,50. Dwa pierwsze ustalono na podstawie metodologii J.P. Morgana, a dwa kolejne to propozycje C. Alexander. W modelach ekonometrycznych do szacowania zmienności posłużyły modele *ARCH* (1), *ARCH* (2), *GARCH* (1,1) i *GARCH* (2,2). Nie estymowano parametrów modeli z większą liczbą opóźnień, ponieważ błędy estymacji byłyby zbyt duże.

W przeciwieństwie do zmienności wyznaczanej na podstawie danych historycznych implikowany parametr zmienności można było określić tylko dla dni, w których notowano opcje na WIG 20. Wyniki uzyskane poszczególnymi metodami przedstawiono na wykresach. Na wykresach 1 i 2 pokazano zmienność oszacowaną na podstawie danych historycznych w porównaniu ze zmiennością klasyczną, a na wykresie 3 – implikowany parametr zmienności w porównaniu ze zmiennością klasyczną. Na podstawie wykresu 1 można stwierdzić, że niezależnie od przyjętego poziomu wagi zmienność wyznaczona na podstawie procedury *EWMA* była niższa od klasycznej. Ponadto, im wyższa była stała wygładzania, tym wyższy był poziom zmienność. Najbardziej zbliżony do odchylenia standardowego otrzymano dla $\lambda = 0{,}95$. Jest to zgodne z teorią, ponieważ dla klasycznej zmienności $\lambda = 1$. Wysokie wagi powodują, że zmienność jest w dużej mierze szacowana na podstawie wcześniejszych danych, a pojedyncze zawirowanie, powodujące nagły wzrost zmienności, utrzymuje ją przez dłuższy czas na podwyższonym poziomie.

---

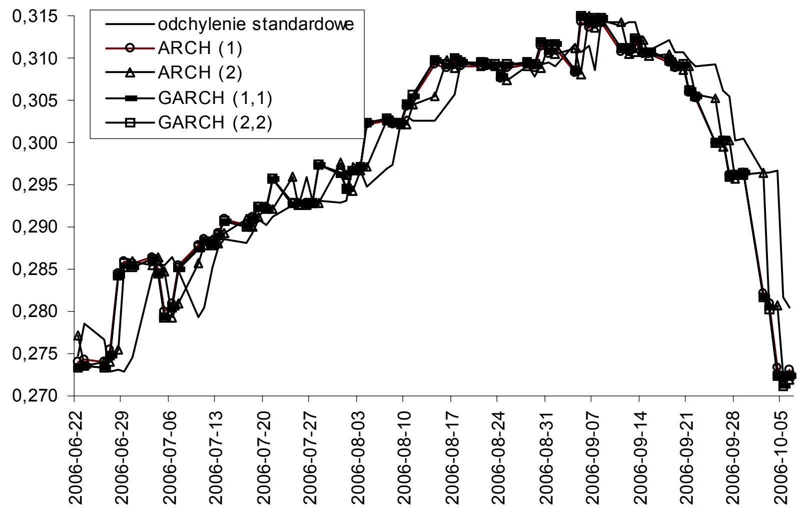
[20] Sposobem weryfikacji, czy zmienność jest taka sama w dniach sesyjnych i roboczych, może być porównanie różnic między kursami w kolejnych dniach tygodnia z różnicami między poniedziałkiem a piątkiem. Przeprowadzone badania różnic potwierdzają zasadność przyjęcia dni sesyjnych. Por. [11]. Połowa zmian między kursami w kolejnych dniach tygodnia jest większa od zmian weekendowych, zatem nie występuje zwiększona zmienność w okresie wolnym od pracy.

[21] Wyniki przeprowadzonych badań dla walorów bazowych instrumentów pochodnych wskazują, że zasadne jest przyjęcie $n = 180$. Por. [12], s. 161–170. Wartości otrzymane dla $n = 180$ nie zmieniają się tak gwałtownie, jak to ma miejsce przy $n = 10$. Ponadto od $n = 90$ parametr zmienności zaczyna być stabilny i wraz ze zwiększaniem liczby obserwacji mniej reaguje na zmiany.



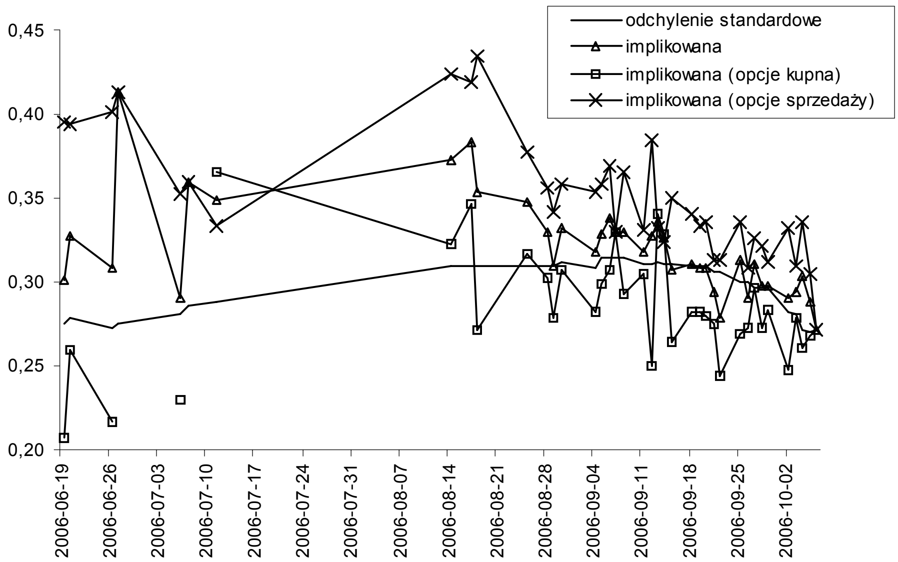
Wykres 1. Zmienność wyznaczona procedurą *EWMA* w porównaniu do klasycznej

Źródło: opracowanie własne.



Wykres 2. Zmienność wyznaczona modelami ekonometrycznymi w porównaniu do klasycznej

Źródło: opracowanie własne.



Wykres 3. Implikowany parametr zmienności w porównaniu ze zmiennością klasyczną

Źródło: opracowanie własne.

W wyniku zastosowania niskiego współczynnika wygasania, przykładając większą wagę do najnowszych danych, efekt cienia zostaje znacznie ograniczony. Należy jednak podkreślić, że szacowanie zmienności przy niskich współczynnikach z uwagi na małą liczebność próby może powodować duży błąd.

W porównaniu z procedurą *EWMA* zmienność wyznaczona na podstawie modeli ekonometrycznych była bardziej zbliżona do odchylenia standardowego. Między zastosowanymi modeli nie wystąpiły również tak duże różnice, jak po przyjęciu różnych wag w procedurze *EWMA*. Podobnie jak we wcześniejszej metodzie szacunki zmienności otrzymane na podstawie modeli ekonometrycznych były ogólnie niższe od odchylenia standardowego. Analizując jednak poszczególne modele, można zauważyć znaczne różnice:

– w modelu *ARCH* (1): 73% przypadków o niższych poziomach zmienności,
– w modelu *ARCH* (2): 57% przypadków o niższych poziomach zmienności,
– w modelu *GARCH* (1,1): 52% przypadków niższych poziomach zmienności,

– w modelu *GARCH* (2,2): 53% przypadków o niższych poziomach zmienności.

Porównując zmienność implikowaną z pozostałymi metodami, można zauważyć, że dla większości przypadków osiągała ona większe wartości niż w pozostałych szacunkach. Wskazywałoby to, że wyceniając opcje, giełda zakładała większe prawdopodobieństwo zmian walorów bazowych. Charakterystyczne jest, że implikowany parametr zmienności wyznaczony na podstawie ceny opcji sprzedaży był we wszystkich przypadkach wyższy od odchylenia standardowego. W opcjach kupna było odwrotnie: w 82% badanych przypadków zmienność implikowana kształtowała się poniżej zmienności klasycznej. Większe zróżnicowanie między analizowanymi zmiennościami wystąpiło dla szacunków wyznaczanych na podstawie opcji sprzedaży, dla których średnia różnica między zmiennością implikowaną a klasyczną wyniosła 18%. W opcji kupna była ona dwukrotnie mniejsza.

Na wyniki zmienności implikowanej decydujący wpływ miały ceny opcji. Większość cen (81%) opcji kupna była niedoszacowana, w przeciwieństwie do opcji sprzedaży, których cena na ogół była przeszacowana (aż 96% cen). Ponad-

Tabela 1

Zmienność klasyczna w porównaniu z pozostałymi szacunkami (%)

Metoda szacunku	Średnie odchylenie	Odchylenia dodatnie (badana zmienność > klasycznej)	Odchylenia ujemne (badana zmienność < klasycznej)
EWMA ($\lambda = 0{,}5$)	29,167	0	100
EWMA ($\lambda = 0{,}7$)	16,267	0	100
EWMA ($\lambda = 0{,}9$)	5,104	0	100
EWMA ($\lambda = 0{,}95$)	2,597	3	97
ARCH (1)	0,113	27	73
ARCH (2)	0,626	43	57
GARCH (1,1)	0,072	48	52
GARCH (1,2)	0,068	47	53
Implikowany parametr	8,554	84	16
Implikowany parametr (opcje kupna)	9,097	18	82
Implikowany parametr (opcje sprzedaży)	17,890	100	0

Źródło: obliczenia własne.

to większe różnice między ceną teoretyczną a rynkową wystąpiły dla opcji sprzedaży.

Podsumowanie wszystkich metod przedstawiono w tabeli 1. Ujęto w niej średnie procentowe odchylenia poszczególnych szacunków zmienności od odchylenia standardowego oraz liczbę przypadków dodatnich i ujemnych odchyleń.

Podsumowanie

Podsumowując, nie ma jednoznacznej odpowiedzi na pytanie, która metoda daje najlepsze rezultaty w szacowaniu zmienności. Wyniki przeprowadzonych badań wskazują, że powszechnie stosowane odchylenie standardowe jest najbliższe zmienności wyznaczonej na podstawie modeli ekonometrycznych. Niezasadne jest zatem stosowanie przez inwestorów, z reguły dążących do wykorzystania jak najprostszych metod, złożonych procesów obliczeniowych *ARCH i GARCH*, skoro prosta miara, którą jest odchylenie standardowe daje bardzo zbliżone wyniki.

Zastosowanie procedury *EWMA*, w której istotne są ostatnie dane, powoduje, że nagłe zmiany poziomu zmienności utrzymują się krócej i szybciej następuje powrót do rzeczywistych wartości. Reakcja ta jest tym szybsza, im niższa będzie wartość λ. Wyniki uzyskane dla $\lambda = 0{,}90$ i $\lambda = 0{,}95$ wykazują większą stabilność w porównaniu z $\lambda = 0{,}5$ i $\lambda = 0{,}7$. W większości przypadków uzyskana dla nich zmienność jest wyższa. W wyniku zastosowania wygładzania wykładniczego uwzględnia się więc głównie ostatnie wydarzenia, a nie jak w metodzie klasycznej również te odległe i mało ważne, bardzo zniekształcające wartość szacunku.

Głównym problemem w wyznaczaniu estymatora zmienności historycznej jest jednak długość przedziału czasowego, który należy uwzględnić. Na ogół estymatory uwzględniające dłuższy okres danych są stabilniejsze niż krótkookresowe, które są bardziej wrażliwe na bieżące zmiany warunków rynkowych. Wybierając liczbę obserwacji, należy jednak pamiętać o tym, że zbyt duża liczba danych może doprowadzić do niewłaściwego szacunku, ponieważ zmienność podlega fluktuacjom w czasie.

Wyznaczając implikowany parametr zmienności, należy pamiętać, że dobre rezultaty daje on wówczas, gdy zarówno rynek kasowy jak i terminowy charakteryzuje się dużą płynnością. W Polsce rynek terminowy dla niektórych walorów nie jest jeszcze dostatecznie płynny, zatem zastosowanie tej metody może doprowadzić do błędnych szacunków. Największą wadą tej metody jest jednak niedoskonałość modeli wyceny, które mogą zafałszować cenę opcji, a tym samym szacunek zmienności.

Literatura

1. Aczel A.D.: *Statystyka w zarządzaniu*. PWN, Warszawa 2000.
2. Alexander C.: *Risk management and analysis*. John Wiley & Sons, London 1996.
3. Black F., Scholes M.: *The pricing of options and corporate liabilities*. „Journal of Political Economy" 1973, No 81.
4. Butler C.: *Tajniki value at risk*. Liber, Warszawa 2001.
5. Dunis Ch.L.: *Prognozowanie rynków finansowych*. Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2001.
6. Engle R.F.: *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom Inflation.* „Econometrica" 1982, No 50.
7. Grzesiak S., Konieczny P.: *Prognozowanie zmienności cen lokat międzybankowych z użyciem modeli GARCH*. W: *Dynamiczne modele ekonometryczne*. Wyd. UMK, Toruń 1998.
8. Grzesiak S., Maliszewski J.: *Dynamiczne prognozowanie macierzy kowariancji dla potrzeb pomiaru ryzyka portfela walutowego*. W: *Dynamiczne modele ekonometryczne*. Wyd. UMK, Toruń 1999.
9. Kroner K., Kneafsey K.P., Claessens S.: *Forecasting volatility in commodity markets*. „International Journal of Forecasting" 1995, No 7.
10. Latané H.A., Rendleman R.J.: *Standard deviations of stock price relatives implied in options prices*. „Journal of Finance" 1976, No 31.
11. Majewska A.: *Badanie zmienności walorów bazowych walutowych kontraktów terminowych*. W: *Rozwój rynku instrumentów pochodnych w Polsce*. II konferencja. Warszawa 1999.
12. Majewska A.: *Szacowanie zmienności na rynku opcji*. „Przegląd Statystyczny" 2000, nr 1–2.
13. Mills J.: *The econometric modelling of financial time series*. University Press, Cambridge 1993.
14. Morgan J., Reuters P.: *Risk Metrics^{TM} – technical document*. Morgan Guaranty Trust Company, New York 1996.

15. Schmalensee R., Trippi R.A.: *Common stock volatility expectations implied by option premia*. „Journal of Finance" 1978, No 3.
16. Weron A., Weron R.: *Inżynieria finansowa*. WNT, Warszawa 1998.

THE COMPARISON OF METHODS OF ESTIMATING VOLATILITY OF UNDERLYING ASSETS IN OPTIONS

Summary

The main goal of this article is to compare methods of estimating volatility of underlying assets in options which are quoted on the Warsaw Stock Exchange. There were analyzed two groups of methods. The first one is historical volatility, based on historical time series data. In the article there are used three approaches in estimation of historical volatility: standard deviation, exponential weight moving averages (*EWMA*), and the volatility from the econometric model (*ARCH*(*q*) type). The second one is implied volatility, taken from Black-Scholes Pricing Models. The way to obtain a volatility estimate is by solving the valuation equations backwards, taking the price of the option in the market as given and finding the volatility that would make the theoretical value in Black-Scholes formula.

Translated by Agnieszka Majewska