

STUDIA I PRACE
WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 2

MARIUSZ DOSZYŃ
Uniwersytet Szczeciński

BAYESOWSKA ANALIZA
KRAŃCOWEJ SKŁONNOŚCI DO KONSUMPCJI

Użyteczność metod bayesowskich w badaniach skłonności ludzkich wiąże się przede wszystkim z tym, że parametr mierzący skłonność jest traktowany jak zmienna losowa, co pozwala na bardziej kompleksowy opis zachowań ludzkich. Stosując metodologię bayesowską, można wyznaczyć rozkład analizowanej skłonności, która charakteryzuje daną osobę bądź zbiorowość¹.

Skłonność można zdefiniować jako nachylenie kogoś lub czegoś w kierunku kogoś lub czegoś, zwiększające prawdopodobieństwo określonych zdarzeń². Skłonność można zmierzyć przez wyznaczenie częstości względnej występowania zdarzeń (metoda częstościowa). Do badania skłonności użyteczna jest również metoda trygonometryczna³.

W artykule J. Hozera i M. Doszynia⁴ została zweryfikowana hipoteza, że skłonności nadają stabilność prawidłowościom rozkładu zmiennych. Można również postawić hipotezę, że skłonności nadają stabilność prawidłowościom w zakresie współzależności zjawisk w czasie i przestrzeni. W takiej sytuacji do badania skłonności mogą być stosowane modele ekonometryczne związków.

¹ Należy jednak pamiętać o tym, że stosowanie metod bayesowskich wiąże się z koniecznością przyjmowania dość silnych założeń. Jeśli założenia te nie mają mocnej podbudowy, do uzyskanych wyników należy odnosić się raczej sceptycznie.

² Jest to definicja prof. J. Hozera. Problematyka skłonności ludzkich i sposobów ich mierzenia została szczegółowo omówiona m.in. w następujących pracach: [3]; [7]; [8]; [9]; [10].

³ Por. *ibidem*.

⁴ [8].

Zgodnie z pentagonem źródeł sił sprawczych prof. J. Hozera, zdarzenia powstają na skutek oddziaływania czasu, miejsca, człowieka, innych zdarzeń oraz przyczyn losowych: *tempus locus homo casus et fortuna regit fatum*⁵. Uwzględnianie skłonności ludzkich w modelach ekonometrycznych pozwala na uwzględnianie wpływu człowieka na przebieg procesów gospodarczych, co może się przyczynić do większej aplikowalności metod ekonometrycznych.

Wpływ człowieka na przebieg zdarzeń można uwzględniać przez wprowadzenie do zbioru zmiennych objaśniających w modelu ekonometrycznym zmiennej mierzącej skłonność. Na przykład, szacując potęgową funkcję produkcji, do zbioru zmiennych objaśniających poza zmiennymi opisującymi majątek i zatrudnienie można wprowadzić zmienną mierzącą skłonność do absencji, skłonność do działań innowacyjnych itd. Wówczas parametr występujący przy danej zmiennej, pokaże jednocześnie, jaki jest wpływ danej skłonności na wartość produkcji⁶.

Skłonności mogą występować w modelu ekonometrycznym również w postaci parametru pokazującego wpływ danej zmiennej objaśniającej na zmienną objaśnianą. Dotyczy to funkcji konsumpcji Keynesa, gdzie krańcowa skłonność do konsumpcji jest parametrem obrazującym wpływ dochodu na poziom konsumpcji. Można przyjąć, że skłonność do konsumpcji charakteryzująca daną zbiorowość nadaje stabilność relacji między dochodami a wydatkami gospodarstw domowych.

Do badania wpływu określonych czynników na kształtowanie się skłonności można także stosować na przykład modele typu probit i logit⁷. W tej klasie modeli skłonność jest zmienną objaśnianą. Tego typu równanie może być przyczynkiem do budowania modeli wielorównaniowych (skłonność może być zmienną objaśniającą w innym równaniu).

1. Bayesowska estymacja funkcji konsumpcji Keynesa

Dla wyznaczenia za pomocą metod bayesowskich krańcowej skłonności do konsumpcji oszacowano funkcję konsumpcji Keynesa:

⁵ Por. [7]; [9]; [10].

⁶ Jest to podejście analogiczne do zastosowanego przez prof. J. Hozera w analizie postępu. Por. m.in. [11].

⁷ Por. [4].

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \quad (1)$$

gdzie

Y_t – wydatki na osobę w gospodarstwach domowych (zł),

X_t – dochody rozporządzalne na osobę w gospodarstwach domowych (zł).

Zgodnie z pentagonem źródeł sił sprawczych, model (1) uwzględnia wpływ człowieka (krańcowa skłonność do konsumpcji), innych zdarzeń (dochód) i przypadku (składnik losowy)⁸. Model ten oszacowano dla danych odnoszących się do sytuacji w Polsce w latach 1998–2005, więc nie wzięto pod uwagę zróżnicowania przestrzennego⁹. Wykorzystywane dane oczyszczono z inflacji i wyrażono w cenach z 2005 roku¹⁰.

Za rozkład *a priori* parametrów przyjęto rozkład naturalnie sprzężony o postaci¹¹:

$$p(\beta, h) = f_{NG}(\underline{\beta}, \underline{V}, \underline{s}^{-2}, \underline{\nu}) \quad (2)$$

gdzie $\underline{\beta}$, \underline{V} , \underline{s}^{-2} , $\underline{\nu}$ – hiperparametry *a priori*, które oznaczają odpowiednio wektor parametrów modelu, skorygowaną macierz wariancji parametrów, odwrotność wariancji składnika losowego i liczbę stopni swobody.

Parametr h jest nazywany błędem precyzji. Jest to odwrotność wariancji składnika losowego:

$$h = s^{-2} \quad (3)$$

⁸ W początkowej fazie badań w modelu (1) uwzględniono również zmienną czasową. Jednak została ona wyeliminowana, ponieważ ocena parametru uzyskana klasyczną metodą najmniejszych kwadratów okazała się nieistotna statystycznie.

⁹ Mała liczba obserwacji jest wynikiem wykorzystania do konstruowania rozkładu *a priori* obserwacji z wcześniejszych lat.

¹⁰ Analizowane dane pochodzą z Rocznika Statystycznego GUS. Warszawa, za lata 1994–2006.

¹¹ Rozkład *a priori* uwzględnia wiedzę o badanym zjawisku, którą dysponuje badacz przed poznananiem się z danymi. Sprzężony rozkład *a priori* to taki rozkład, który po uwzględnieniu funkcji wiarygodności daje rozkład należący do takiej samej klasy, jak rozkład *a posteriori*. Por. [13]; [6].

Rozkład (2) jest tak zwanym rozkładem normalnym gamma, czyli takim, w którym rozkład warunkowy y względem h jest rozkładem normalnym, a parametr h ma rozkład gamma¹².

Funkcję wiarygodności można przedstawić następująco¹³:

$$p(y/\beta, h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left\{ h^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{h}{2} (\beta - \hat{\beta})' X' X (\beta - \hat{\beta}) \right] \right\} \left\{ h^{\frac{v}{2}} \exp \left[-\frac{hv}{2s^2} \right] \right\} \quad (4)$$

gdzie

N – liczba obserwacji,

X – macierz obserwacji dokonanych na zmiennych objaśniających,

$v = N - k$ – liczba stopni swobody,

$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$ – wektor ocen parametrów strukturalnych,

$s^2 = \frac{(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})}{v}$ – wariancja reszt modelu.

Wymnażając rozkład *a priori* i funkcję wiarygodności, otrzymujemy rozkład *a posteriori*¹⁴:

$$p(\beta, h/y) = f_{NG}(\bar{\beta}, \bar{V}, \bar{s}^{-2}, \bar{v}) \quad (5)$$

gdzie

$$\bar{\beta} = \bar{V}(\underline{V}^{-1} \underline{\beta} + X'X\hat{\beta}) \quad (6)$$

$$\bar{V} = (\underline{V}^{-1} + X'X)^{-1} \quad (7)$$

$$\bar{v} = \underline{v} + N \quad (8)$$

Wartość \bar{s}^{-2} jest wyznaczana z następującej zależności:

¹² Por. [13], s. 329.

¹³ Por. *ibidem*, s. 36.

¹⁴ Por. *ibidem*.

$$\overline{vs}^2 = \underline{vs}^2 + vs^2 + (\hat{\beta} - \underline{\beta})' \left[\underline{V} + (X'X)^{-1} \right]^{-1} (\hat{\beta} - \underline{\beta}) \quad (9)$$

Zależności te przedstawiają łączny rozkład parametrów β i h . Rozkład brzegowy poszczególnych elementów wektora β ma postać rozkładu t -Studenta¹⁵:

$$\beta / y \sim t(\bar{\beta}, \bar{s}^2 \bar{V}, \bar{v}) \quad (10)$$

Korzystając z własności rozkładu t -Studenta, można stwierdzić, że:

$$E(\beta / y) = \bar{\beta} \quad (11)$$

$$\text{var}(\beta / y) = \frac{\bar{vs}^2}{\bar{v} - 2} \bar{V} \quad (12)$$

Z własności rozkładu normalnego gamma wynika, że¹⁶:

$$h / y \sim G(\bar{s}^{-2}, \bar{v}) \quad (13)$$

W związku z tym

$$E(h / y) = \bar{s}^{-2} \quad (14)$$

$$\text{var}(h / y) = \frac{2\bar{s}^{-2}}{\bar{v}} \quad (15)$$

Gęstość predyktywną zmiennej objaśnianej w sprzężonym rozkładzie *a priori* dla liniowego modelu regresji można wyznaczyć z następującej zależności¹⁷:

$$y^* / y \sim t(X^* \bar{\beta}, \bar{s}^2 \{1 + X^* \bar{V} X^*\}, \bar{v}) \quad (16)$$

gdzie X^* – wektor przyszłych wartości zmiennych objaśniających.

¹⁵ Por. *ibidem*, s. 37.

¹⁶ Por. *ibidem*.

¹⁷ Por. *ibidem*, s. 46.

2. Przykład empiryczny

Jedną z możliwości konstruowania rozkładu *a priori* jest wykorzystanie wyników z wcześniej przeprowadzonych badań analizowanego zjawiska. Do wyznaczenia rozkładu *a priori* (2) posłużono się wynikami otrzymanymi dla modelu identycznego jak model (1), wyznaczonego klasyczną metodą najmniejszych kwadratów na podstawie danych za lata 1993–1997. Informacje wykorzystane do tworzenia rozkładu *a priori* przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Funkcja konsumpcji (1) wyznaczona na podstawie danych za lata 1993–1997 wraz z błędami i istotnością ocen parametrów ($S_e = 12,336$ zł, skorygowany $\bar{R}^2 = 0,811$)

Zmienna	$\hat{\beta}$	$D(\hat{\beta})$	$t(\hat{\beta})$	p_i
Stała	220,526	89,665	2,459	0,09091
X_t	0,590	0,138	4,265	0,02365

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych GUS.

Po uwzględnieniu informacji zawartych w tabeli 1 otrzymano następujące wartości parametrów informacyjnego rozkładu *a priori* (2):

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} 220,526 \\ 0,590 \end{bmatrix}; \quad \underline{V} = \begin{bmatrix} 17,60962 & 0 \\ 0 & 0,00004 \end{bmatrix}; \quad \underline{s}^{-2} = 12,336^{-2}; \quad \underline{\nu} = 3.$$

Macierz \underline{V} wyznaczono w taki sposób, aby wariancje parametrów rozkładu *a priori* były takie, jak wariancje estymatorów parametrów modelu przedstawionego w tabeli 1. Wartość \underline{s}^{-2} to odwrotność wariancji reszt modelu, będącego podstawą do wyznaczenia rozkładu *a priori*. Dla nadania większej wagi wartościom empirycznym niż wartościom rozkładu *a priori* przyjęto, że $\underline{\nu} = 3$.

Po oszacowaniu model (1) ma następującą postać¹⁸:

$$\hat{y}_i = 245,568 + 0,612 x_i \quad (17)$$

(42,194) (0,058)

Oczekiwana wartość parametru precyzji (14) wyniosła 0,0062, a odchylenie standardowe parametru precyzji – 0,0334¹⁹. W tabeli 2 przedstawiono 95-procentowe przedziały największej gęstości *a posteriori* (*Highest Posterior Density Intervals*)²⁰. Można stwierdzić, że jeżeli dany przedział największej gęstości *a posteriori* nie zawiera zera, to ocena parametru istotnie różni się od zera. Wniosek taki jest słuszny dla każdej z uzyskanych ocen parametrów.

Tabela 2

Przedziały największej gęstości *a posteriori*
(*Highest Posterior Density Intervals*)
dla otrzymanych ocen parametrów

$\hat{\beta}_0$	161,565	329,572
$\hat{\beta}_1$	0,495	0,728

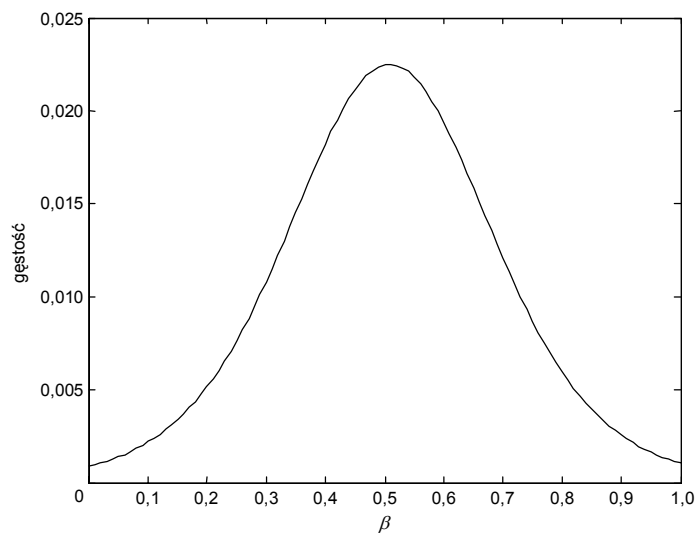
Źródło: obliczenia własne.

Głównym celem estymacji modelu (1) było wyznaczenie rozkładu krańcowej skłonności do konsumpcji w Polsce. Rozkład *a posteriori* parametru, będącego jej oszacowaniem, przedstawiono na rysunku 1. Na podstawie oceny parametru $\hat{\beta}_1$ można stwierdzić, że wzrost realnych dochodów o 100,00 zł powoduje wzrost wydatków konsumpcyjnych średnio o 61,20 zł. Ocenę wyrazu wolnego $\hat{\beta}_0 = 245,568$ można traktować jako wydatki autonomiczne.

¹⁸ W nawiasach pod ocenami parametrów podano błędy standardowe.

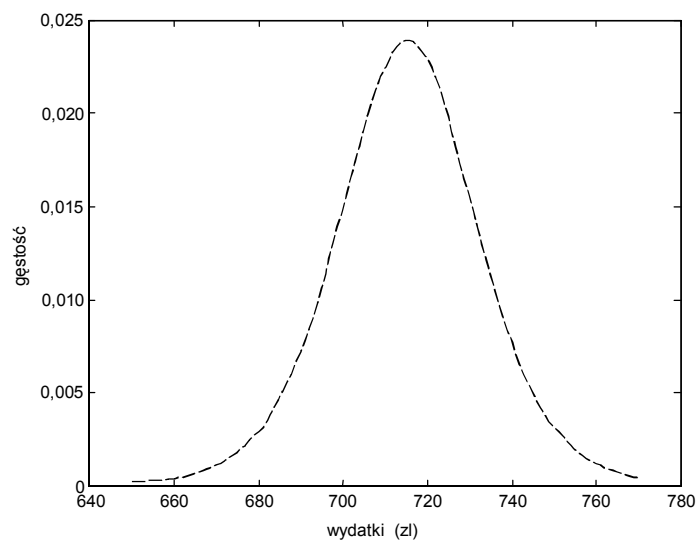
¹⁹ Jest to pierwiastek wariancji precyzji (15).

²⁰ 95-procentowy przedział największej gęstości *a posteriori* oceny parametru to przedział obejmujący najmniejszy obszar spośród analogicznych, pozostałych 95-procentowych przedziałów. Por. [13], s. 44.



Rys. 1. Rozkład *a posteriori* oceny parametru β_1 (krańcowa skłonność do konsumpcji)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Gęstość predykcyjna (16) wydatków konsumpcyjnych w 2006 roku

Źródło: opracowanie własne.

Prognoza wydatków konsumpcyjnych na 2006 rok (wyznaczona z założeniem, że dochód realny będzie równy 777,19 zł) wyniosła 720,84 zł, a błąd standardowy prognozy – 15,34 zł²¹.

Podsumowanie

W artykule zweryfikowano hipotezę, że oszacowanie odpowiednio zdefiniowanego modelu umożliwia wyznaczenie skłonności²². Precyzyjne wyznaczenie skłonności na podstawie modelu ekonometrycznego wymaga uwzględniania wszystkich źródeł sił sprawczych, a więc zarówno miejsca, czasu, człowieka, jak i zdarzeń oraz przypadku.

Na podstawie funkcji konsumpcji Keynesa wyznaczono krańcową skłonność do konsumpcji w Polsce w latach 1998–2005. Wartość krańcowej skłonności do konsumpcji wyniosła 0,612, co oznacza, że wzrost realnego dochodu o 100,00 zł powoduje wzrost konsumpcji na osobę średnio o 61,20 zł.

Zastosowanie metod bayesowskich umożliwiło wyznaczenie rozkładu analizowanej skłonności i rozkładów pozostałych wielkości. Traktowanie skłonności jako zmiennych losowych jest bliższe rzeczywistości i pozwala na bardziej kompleksowy opis zachowań ludzkich. Przyjęto sprzężone, informacyjne rozkłady *a priori* (rozkład normalny gamma). Rozkłady *a priori* wyznaczono na podstawie informacji pochodzących z wcześniejszego badania. Wyznaczono również gęstość predyktywną i prognozę punktową wydatków konsumpcyjnych w 2006 roku.

Literatura

1. Domański C., Pruska K.: *Nieklasyczne metody statystyczne*. PWE, Warszawa 2000.
2. Doszyń M.: *Analiza skłonności do konsumpcji dla poszczególnych rodzajów gospodarstw domowych w Polsce w latach 1993–2002*. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 394. Szczecin 2005.
3. Doszyń M.: *Statystyczna analiza skłonności ludzkich w procesach gospodarowania*. Praca doktorska. Szczecin 2005.

²¹ Prognozę dochodu realnego wyznaczono na podstawie funkcji trendu liniowego.

²² W artykule poddano analizie skłonności krańcowe. Na podstawie odpowiednio zbudowanego modelu ekonometrycznego można również wyznaczyć skłonności przeciętne.

4. Doszyń M.: *Zastosowanie modeli typu logit oraz probit do badania skłonności ludzkich*. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 415. Szczecin 2004.
5. Geweke J.: *Contemporary bayesian econometrics and statistics*. University of Iowa, Iowa 2003.
6. Grabski F., Jaźwiński J.: *Metody bayesowskie w niezawodności i diagnostyce*. WKiŁ, Warszawa 2001.
7. Hozer J.: *Ekonometryczna interpretacja skłonności w ekonomii*. „Przegląd Statystyczny” 2002, nr 3.
8. Hozer J.: *Skłonności w ekonomii i ich mierzenie*. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 365. Szczecin 2003.
9. Hozer J., Doszyń M.: *Ekonometria skłonności*. PWE, Warszawa 2004.
10. Hozer J., Doszyń M.: *Skłonności a całościowo-strukturalne badanie zjawisk*. „Przegląd Statystyczny” 2004, nr 4.
11. Hozer J., Zawadzki J.: *Zastosowanie ekonometrii w transporcie*. WKiŁ, Warszawa 1986.
12. Hozer J., Zawadzki J.: *Zmienna czasowa i jej rola w badaniach ekonometrycznych*. PWN, Warszawa 1990.
13. Koop G.: *Bayesian econometrics*. University of Glasgow, Glasgow 2003.
14. Osiewalski J.: *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*. Wyd. Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków 2001.
15. Popper K.: *Świat skłonności*. Znak, Kraków 1996.

BAYESIAN ANALYSIS OF MARGINAL PROPENSITY TO CONSUMPTION

Summary

In the article calculation of marginal propensities by means of properly specified econometric models were presented. Bayesian approach was applied to estimate marginal propensity to consumption in Poland for informative (Normal – Gamma) *a priori* distribution. *Highest Posterior Density Intervals* and parameters of precision for computed estimators were also discussed. Forecast and predictive density of expenditures obtained on the basis of estimated model were also presented.

Translated by Mariusz Doszyń