



**Robert Tadeusz Józwiak**

**WYKORZYSTANIE MATEMATYCZNYCH TECHNIK  
DECYZYJNYCH DO OPTYMALIZACJI MIEJSCA I SPOSOBU  
OPODATKOWANIA DOCHODU**

**AUTOREFERAT**

**Promotor**

**dr hab. Stefan Grzesiak prof. US**

**Recenzenci**

**prof. zw. dr hab. Edward Nowak**

**dr hab. Janusz Korol prof. US**

**Szczecin 2014**

## Spis treści

1. Wstęp - uzasadnienie tematu.....	3
2. Cel rozprawy i hipoteza naukowa.....	4
3. Charakterystyka badanego procesu decyzyjnego.....	5
4. Modelowanie procesu decyzyjnego i wyniki Badania.....	9
5. Wnioski.....	20

## **1. Wstęp – uzasadnienie wyboru tematu**

W ostatnich latach daje się zaobserwować dynamiczny rozwój transgranicznych działalności gospodarczych, którego niewątpliwą przyczyną jest postępująca globalizacja, jak również coraz głębiej sięgające procesy integracyjne w ramach Unii Europejskiej. Dobitnymi przykładami tego trendu są tysiące polskich firm budowlanych świadczących usługi na terenie całej Europy. Tendencja ta generuje ciągły wzrost zapotrzebowania na coraz bardziej efektywne narzędzia wspomagające procesy zarządzania podatkami w skali międzynarodowej. Z jednej strony - istnieje coraz większe zapotrzebowanie na metody umożliwiające dokonywanie skutecznych porównań obciążeń podatkowych, z drugiej strony - potrzeba opracowania konkretnych sposobów postępowania bezpośrednio wspomagających procesy podejmowania decyzji. Wyniki tego typu badań są istotne zarówno dla przedsiębiorców podejmujących decyzje wyboru miejsca opodatkowania, jak również dla instytucji prawodawczych mających za zadanie zabezpieczenie atrakcyjności inwestycyjnej danego rynku krajowego.

W przypadku przedsiębiorców prowadzących działalność transgraniczną obok kwestii wyboru kraju opodatkowania występuje często rozszerzony problem decyzyjny polegający na podatkowo optymalnym rozdziale osiąganego dochodu na oba kraje. Praktyka wykazuje, że jego rozwiązanie jedynie przy pomocy porównania odpowiednich taryf podatkowych jest niewystarczające. Przy podejmowaniu tego typu decyzji istnieje nieodzowność uwzględnienia szeregu opcji przewidzianych przez badane systemy podatkowe, co wymusza konieczność stosowania zaawansowanych metod decyzyjnych.

W literaturze przedmiotu stosunkowo szeroko prezentowane są zagadnienia międzynarodowego planowania podatkowego w koncernach. Zdecydowanie brakuje jednak odpowiednich metod odnoszących się do osób fizycznych prowadzących transgraniczną działalność gospodarczą. Podatkowe zagadnienia decyzyjne związane właśnie z tą grupą przedsiębiorców są wbrew pozorom niejednokrotnie problemami znacznie bardziej kompleksowymi, co dodatkowo potęguje zapotrzebowanie na efektywne instrumentarium wspomagające procesy decyzyjne.

## 2. Cel rozprawy i hipoteza naukowa

Celem pracy było **autorskie opracowanie metod wspomagających podejmowanie decyzji wyboru miejsca opodatkowania polskiego rezydenta, rozważającego podjęcie pozarolniczej działalności gospodarczej w Polsce i w Niemczech.**

Za wyborem Niemiec przemawiały względy metodyczne. Duży stopień skomplikowania niemieckiego systemu podatku dochodowego od osób fizycznych dał możliwość wszechstronnego przetestowania zaproponowanych metod, jak również przeprowadzenia wielorakich analiz pozwalających na dogłębną ocenę przydatności zaproponowanych rozwiązań. Nie bez znaczenia był również fakt istnienia silnych więzów gospodarczych z tym krajem, a w związku z tym szerokich możliwości praktycznego zastosowania uzyskanych rozwiązań.

Opracowane modele zastosowano w dwóch scenariuszach stanowiących odrębne problemy decyzyjne:

1. Klasyczny problem wyboru , polegający na wyborze jednego z krajów jako miejsca opodatkowania dochodów z pozarolniczej działalności gospodarczej.
2. Problem podziału zysków na oba kraje przy założeniu dopuszczalności jednoczesnego prowadzenia działalności na terenie obu państw.

Tak wytyczonemu zasadniczemu celowi pracy przyporządkowano następujące zadania badawcze:

1. Przeprowadzenie analizy porównawczej opodatkowania dochodów osoby fizycznej prowadzącej pozarolniczą działalność gospodarczą w Polsce i w Niemczech.
2. Identyfikacja procesów decyzyjnych związanych z transgranicznym wyborem miejsca opodatkowania.
3. Dobór metod badań operacyjnych nadających się do modelowania podatkowych procesów decyzyjnych.

4. Konstrukcja i rozwiązanie formalnych modeli decyzyjnych wyboru miejsca opodatkowania, zawierających parametry uwzględniające taryfy podatkowe oraz zasiłki rodzinne w obu krajach.
5. Badanie wrażliwości modeli decyzyjnych na zmiany wybranych parametrów.
6. Opracowanie reguł decyzyjnych opartych na teorii zbiorów przybliżonych.

Podstawową hipotezą badawczą było stwierdzenie:

**Zastosowanie zaawansowanych metod wspomaganie decyzji pozwala na efektywniejszy wybór miejsca opodatkowania dochodów w celu ich maksymalizacji.**

Weryfikacja wyżej przedstawionej hipotezy wymagała oceny efektywności opracowanego „zestawu narzędzi” wspomagającego procesy decyzyjne polskiej osoby fizycznej prowadzącej działalność gospodarczą, mającej dokonać wyboru miejsca opodatkowania.

Mimo iż wybór ograniczono do Polski i Niemiec, to wypracowane w pracy instrumentarium może zostać bez większych problemów przeniesione na systemy podatkowe innych krajów, co pozwala traktować zaproponowane procedury jako rozwiązania uniwersalne.

### **3. Charakterystyka badanego procesu decyzyjnego**

W pracy przedstawiono istotę i możliwości aplikacji zaawansowanych metod wspomagających decydenta, będącego polskim rezydentem podatkowym, który zamierza podjąć transgraniczną działalność gospodarczą na terenie Polski i Niemiec. Przed decydem posiadającym określone i ograniczone moce produkcyjne stoją następujące opcje:

1. Prowadzenie działalności gospodarczej w obu krajach przy opodatkowaniu osiągniętych dochodów tylko w Polsce.
2. Prowadzenie działalności gospodarczej w obu krajach przy opodatkowaniu dochodów odpowiednio w Polsce oraz w Niemczech.
3. Prowadzenie działalności gospodarczej tylko w Niemczech i opodatkowanie jej w Polsce.

4. Prowadzenie działalności gospodarczej tylko w Niemczech i opodatkowanie jej w Niemczech.
5. Prowadzenie działalności gospodarczej tylko w Polsce i opodatkowanie jej w Polsce.

Wybór drugiej opcji generuje dodatkowo problem optymalnego podziału zysków między oba kraje. Pozostałe warianty odpowiadają klasycznemu wyborowi miejsca opodatkowania, przy którym wykluczone jest jednoczesne opodatkowanie na terenie obu krajów. We wszystkich wymienionych przypadkach celem decydenta jest wybór opcji prowadzącej do minimalnej wysokości podatku dochodowego od osób fizycznych. Decyzja zostanie podjęta na podstawie wysokości jego przewidywanych dochodów z działalności gospodarczej, wysokości innych dochodów uzyskanych w Polsce, prognozowanej wysokości dochodów uzyskanych przez współmałżonka na terenie Polski oraz liczby posiadanych dzieci.

W procesie decyzyjnym autor uwzględnił taryfy podatkowe obu krajów oraz systemy zasiłków rodzinnych, stanowiące integralną część niemieckiego podatku dochodowego od osób fizycznych.

Obok kwestii wyboru miejsca opodatkowania decydent musi także dokonać wyboru optymalnego sposobu opodatkowania. W przypadku wyboru Niemiec szczególnie istotną jest decyzja odnosząca się do rodzaju obowiązku podatkowego. Poprzez ustanowienie miejsca zamieszkania lub miejsca pobytu na terenie Niemiec decydent może zdecydować się na nieograniczony obowiązek podatkowy<sup>1</sup>, który charakteryzuje się korzystną taryfą podatkową. Ten cel może również osiągnąć nie mając możliwości ustanowienia miejsca zamieszkania lub pobytu na terenie Niemiec, poprzez stosowną redukcję dochodów osiągniętych w Polsce<sup>2</sup>. W niektórych przypadkach korzystniejszym jest jednak ograniczony obowiązek podatkowy<sup>3</sup>, któremu w przeciwieństwie do nieograniczonego obowiązku podlegają jedynie dochody osiągnięte na terenie Niemiec. Ta istotna zaleta może całkowicie zrekompensować wszelkie niedogodności taryfowe.

---

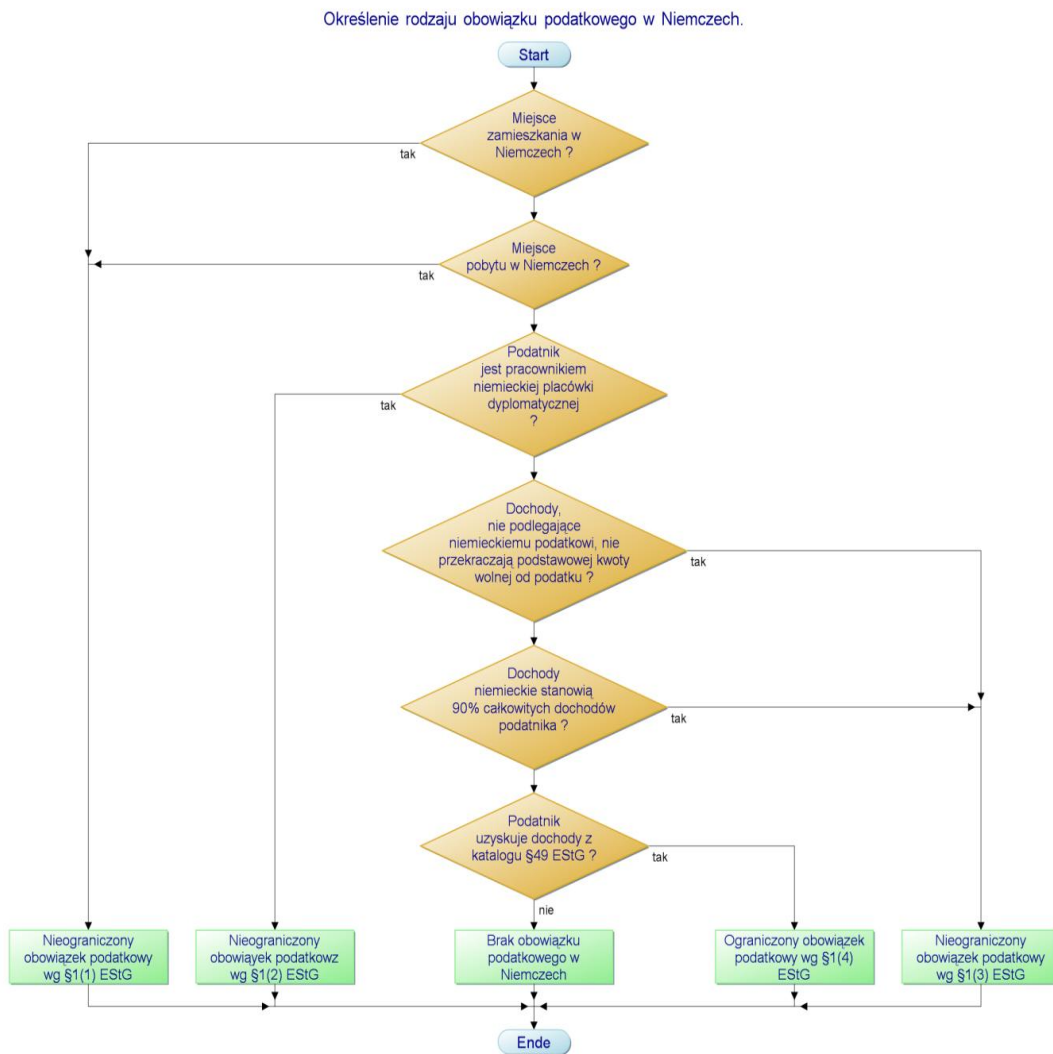
<sup>1</sup> Por. §1(1) EStG - niemiecka ustawa o podatku dochodowym od osób fizycznych

<sup>2</sup> Por. §1(3) EStG

<sup>3</sup> Por. §1(4) EStG

Na rys. 1 przedstawiono schemat obrazujący problematykę nieograniczonego i ograniczonego obowiązku podatkowego w Niemczech.

**Rys. 1. Procedura ilustrująca określenie rodzaju obowiązku podatkowego w Niemczech.**



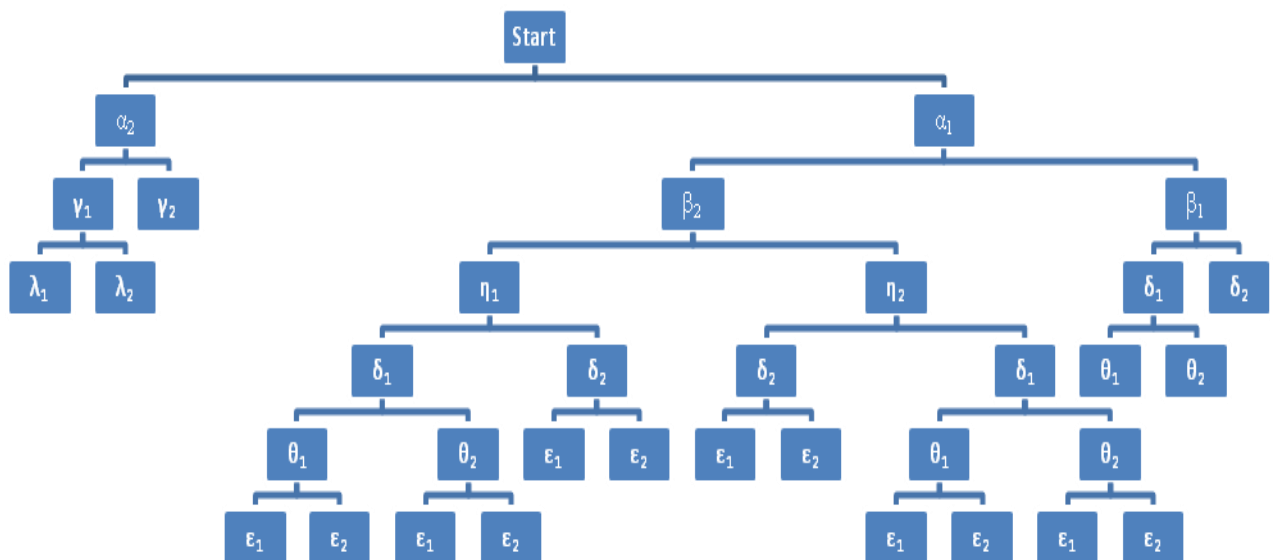
Źródło: opracowanie własne

Wybór optymalnego obowiązku podatkowego w Niemczech nie jest jedyną opcją podatkową analizowanego problemu decyzyjnego. Decydent, który wybiera Niemcy jako miejsce opodatkowania swoich dochodów z pozarolniczej działalności gospodarczej, musi podjąć również decyzje odnoszące się do ewentualnego wspólnego rozliczenia małżeńskiego jak również do wyboru optymalnej formy ulgi na dzieci.

Po stronie polskiej występuje obok rozliczenia na zasadach ogólnych dodatkowa alternatywa polegająca na zastosowaniu podatku liniowego. W ramach rozliczenia na zasadach ogólnych według skali podatkowej konieczne jest podjęcie decyzji odnośnie łącznego lub indywidualnego rozliczenia wółmałżonków. Wbrew pozorom opcja polegająca na przeprowadzeniu łącznego rozliczenia przez wółmałżonków bardzo często okazuje się rozwiązaniem zdecydowanie mniej korzystnym.

Na rys. 2 przedstawiono przykład drzewa decyzyjnego odnoszącego się do klasycznego problemu wyboru miejsca opodatkowania, uwzględniającego większość wymienionych alternatyw podatkowych.

**Rys. 2: Drzewo decyzyjne procesu wyboru miejsca i sposobu opodatkowania.**



Źródło: opracowanie własne

Poszczególne węzły oznaczają odpowiednio

$\alpha_1$  – wybór Niemiec jako miejsca opodatkowania dochodów

$\alpha_2$  – wybór Polski jako miejsca opodatkowania dochodów

$\beta_1$  – ograniczony obowiązek podatkowy w Niemczech

$\beta_2$  – nieograniczony obowiązek podatkowy w Niemczech

$\eta_1$  – rozliczenie indywidualne w Niemczech

$\eta_2$  – rozliczenie małżeńskie w Niemczech



- $\varepsilon_1$  – ulga na dzieci w formie odliczenia od podatku
- $\varepsilon_2$  – ulga na dzieci w formie zasiłku od podatku
- $\delta_1$  – zastosowanie podatku na zasadach ogólnych w Polsce przy wyborze Niemiec jako miejsca opodatkowania dochodów z działalności gospodarczej
- $\delta_2$  – zastosowanie podatku liniowego w Polsce przy wyborze Niemiec jako miejsca opodatkowania dochodów z działalności gospodarczej
- $\theta_1$  – indywidualne rozliczenie w Polsce przy wyborze Niemiec jako miejsca opodatkowania dochodów z działalności gospodarczej
- $\theta_2$  – łączne rozliczenie małżeńskie w Polsce przy wyborze Niemiec jako miejsca opodatkowania dochodów z działalności gospodarczej
- $\gamma_1$  – opodatkowanie na zasadach ogólnych w Polsce przy wyborze Polski jako miejsca opodatkowania dochodów z działalności gospodarczej
- $\gamma_2$  – zastosowanie podatku liniowego przy wyborze Polski jako miejsca opodatkowania dochodów z działalności gospodarczej
- $\lambda_1$  – indywidualne rozliczenie w Polsce przy wyborze Polski jako miejsca opodatkowania dochodów z działalności gospodarczej
- $\lambda_2$  – wspólne rozliczenie małżeńskie w Polsce przy wyborze Polski jako miejsca opodatkowania dochodów z działalności gospodarczej

#### **4. Modelowanie problemu decyzyjnego i wyniki badania**

Do rozwiązania problemu zastosowane zostały metody programowania matematycznego oraz teorii zbiorów przybliżonych. Wspierają one decydenta nie tylko w procesie podejmowania decyzji związanej w wyborem miejsca opodatkowania, ale dostarczają mu również precyzyjnych wskazówek dotyczących wyboru odpowiednich form opodatkowania.

Przedstawione w pracy metody i modele stanowią rozwiązania autorskie. Dotyczy to zarówno modeli opartych na programowaniu matematycznym, jak również metodzie wyboru miejsca opodatkowania przy pomocy reguł decyzyjnych wygenerowanych na bazie teorii zbiorów przybliżonych. Przedstawione rozwiązania są pewnym krokiem zmierzającym do wypełnienia luki, jaką stanowią dotychczas bardzo

skromne próby zastosowań badań operacyjnych w dziedzinach związanych z zarządzaniem podatkami. W.H. Wacker<sup>4</sup> już przed blisko pół wiekiem wskazywał na niezadawalające zastosowanie metod badań operacyjnych w procesach planowania obciążeń podatkowych. Mimo silnego skwantyfikowania tych procesów udział badań operacyjnych jest nadal niedostateczny.

W rozdziałach empirycznych pracy przedstawiono szereg mieszanych modeli decyzyjnych typu MINLP. Swoją nieliniowość zawdzięczają one kwadratowej taryfie niemieckiego podatku dochodowego od osób fizycznych, natomiast całkowitoliczbowość spowodowana jest powiązaniem logicznymi poszczególnych członów tworzących funkcję celu. Poniższy przykład w uproszczony sposób ilustruje przedstawioną tam koncepcję:

*Decydent będący polskim rezydentem podatkowym uzyskuje dochody w wysokości  $x$  z działalności gospodarczej, które może uzyskać i opodatkować w Polsce lub w Niemczech. Ponadto uzyskuje dalsze dochody w wysokości  $y$  z działalności gospodarczej prowadzonej na terenie Polski. Jego problem polega na określeniu miejsca opodatkowania (Polska lub Niemcy) dochodów  $x$  oraz sposobu opodatkowania na terenie Polski dochodów  $y$  oraz  $x$  tak, aby całkowity należny podatek był minimalny.*

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

**fnn(x,y)** - funkcja określająca wysokość podatku dochodowego w Niemczech przy wyborze Niemiec jako miejsca opodatkowania,

**fnpl(y)** - funkcja określająca wysokość liniowego podatku dochodowego w Polsce przy wyborze Niemiec jako miejsca opodatkowania,

**fnps(y,x)** - funkcja określająca wysokość podatku dochodowego w Polsce według skali podatkowej przy wyborze Niemiec jako miejsca opodatkowania,

**fppl(y,x)** - funkcja określająca wysokość liniowego podatku dochodowego w Polsce przy wyborze Polski jako miejsca opodatkowania,

**fpps(y,x)** - funkcja określająca wysokość podatku dochodowego według skali podatkowej w Polsce przy wyborze Polski jako miejsca opodatkowania,

---

<sup>4</sup> Wacker W.H., Steuerplanung im nationalen und transnationalen Unternehmen, Erich Schmidt Verlag, Berlin 1979, s. 116.

Model wykorzystujący programowanie matematyczne, który odpowiada odpowiednim gałęziom przedstawionego na rys. 2 drzewa decyzyjnego, jest całkowitoliczbowy z zerojedynkowymi zmiennymi decyzyjnymi o następującej postaci:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot f_{nn}(x,y) + \beta_1 \cdot f_{npl}(y) + \beta_2 \cdot f_{nps}(y,x) + \alpha_2 \cdot (\gamma_1 \cdot f_{npl}(y,x) + \gamma_2 \cdot f_{nps}(y,x)) &\rightarrow \min \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \beta_1 + \beta_2 &= 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 &= 1 \\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

O ile w przypadku zmiennych  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  minimalizacja funkcji celu determinowała wybór określonej alternatywy, tak można sobie również wyobrazić, iż decyzja może zostać równie dobrze podjęta w wyniku kontroli określonej wielkości, przy wykorzystaniu alternatywnych warunków ograniczających, które „włączają” bądź „wykluczają” pewne warianty tworzące funkcję celu.

W celu ilustracji tego typu zmiennych dołączamy do przedstawionego przykładu dwie dodatkowe zmienne  $\eta_1$  oraz  $\eta_2$ . Oznaczają one odpowiednio:

$\eta_1$  – opodatkowanie w Niemczech na zasadzie nieograniczonego obowiązku podatkowego

$\eta_2$  – opodatkowanie w Niemczech na zasadzie ograniczonego obowiązku podatkowego

Zmienne  $\eta_1$  oraz  $\eta_2$  stanowią „włączniki” odpowiednich funkcji taryfowych:

$f_{nnn}$  - funkcja określająca wysokość podatku dochodowego wynikającego z nieograniczonego obowiązku podatkowego w Niemczech przy wyborze Niemiec jako miejsca opodatkowania,

$f_{nno}$  - funkcja określająca wysokość podatku dochodowego wynikającego z ograniczonego obowiązku podatkowego w Niemczech przy wyborze Niemiec jako miejsca opodatkowania.

Zakładając, iż decydent nie jest niemieckim rezydentem i nie posiada w Niemczech miejsca zamieszkania (§8 AO)<sup>5</sup> względnie pobytu (§9 AO), wówczas możliwym jest opodatkowanie na bazie nieograniczonego obowiązku podatkowego tylko wtedy, gdy

---

<sup>5</sup> AO – Abgabenordnung – niemiecka ordynacja podatkowa

polские dochody decydenta nie przekraczają kwoty 4.002 € (§1(3) EstG). Prowadzi to do następującej modyfikacji problemu:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot (\eta_1 \cdot f_{nno}(x,y) + \eta_2 \cdot f_{nno}(x) + \beta_1 \cdot f_{npl}(y) + \beta_2 \cdot f_{nps}(y,x)) + \alpha_2 \cdot (\gamma_1 \cdot f_{npl}(y,x) + \gamma_2 \cdot f_{nps}(y,x)) \rightarrow \min \\ \eta_1 \cdot y \leq 4.002 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \\ \eta_1 + \eta_2 = 1 \\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Odrzucając założenie o braku miejsca zamieszkania oraz pobytu w Niemczech, można sformułować model bardziej ogólny. W tym celu wprowadzono dodatkowo parametry  $m_1$  i  $m_2$  oraz zmienną pomocniczą  $\lambda$ .

Parametr  $m_1$  przyjmuje wartość 1, gdy istnieje miejsce zamieszkania lub pobytu w Niemczech, zaś 0 w przeciwnym wypadku. Parametr  $m_2$  przyjmuje wartość 1, gdy istnieje możliwość ustanowienia miejsca zamieszkania lub pobytu w Niemczech, zaś 0 – w przeciwnym wypadku.

Model przybiera wówczas postać:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot (\eta_1 \cdot f_{nno}(x,y) + \eta_2 \cdot f_{nno}(x) + \beta_1 \cdot f_{npl}(y) + \beta_2 \cdot f_{nps}(y,x)) + \alpha_2 \cdot (\gamma_1 \cdot f_{ppl}(y,x) + \gamma_2 \cdot f_{pps}(y,x)) \rightarrow \min \\ m_1 \cdot \eta_2 = 0^6 \\ \lambda_1 \cdot y \leq 4.002^7 \\ \lambda_2 \cdot y \leq 0,1 \cdot (x+y)^8 \\ m_1 + m_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \geq \eta_1^9 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \end{aligned}$$

<sup>6</sup> Miejsce zamieszkania lub pobyt w Niemczech wykluczają zastosowanie ograniczonego obowiązku podatkowego: ( $m_1=1$ ) $\Rightarrow$ ( $\eta_2=0$ )

<sup>7</sup> Jeśli dochód uzyskany w Polsce przekracza 4.002 €, wówczas  $\lambda_1=0$ .

<sup>8</sup> Jeśli dochód uzyskany w Niemczech nie stanowi więcej niż 90% całkowitych dochodów decydenta, wówczas  $\lambda_2=0$ .

<sup>9</sup> Warunek należy interpretować jako implikację: ( $m_1=0$ ) $\wedge$ ( $m_2=0$ ) $\wedge$ ( $\lambda_1=0$ ) $\wedge$ ( $\lambda_2=0$ ) $\Rightarrow$ ( $\eta_1=0$ ), co oznacza, że jeśli podatnik nie posiada miejsca zamieszkania lub pobytu w Niemczech, jak również nie istnieje możliwość ich ustanowienia oraz nie spełnione są warunki §1(3) EstG (polские dochody > 4.002 lub niemieckie dochody nie stanowią więcej niż 90% całkowitych dochodów decydenta), wówczas wykluczone jest zastosowanie nieograniczonego obowiązku podatkowego. Jeśli natomiast jeden z warunków jest spełniony, istnieje możliwość wyboru wartości  $\eta_1$ , która okaże się korzystniejsza z punktu widzenia minimalizacji funkcji celu.

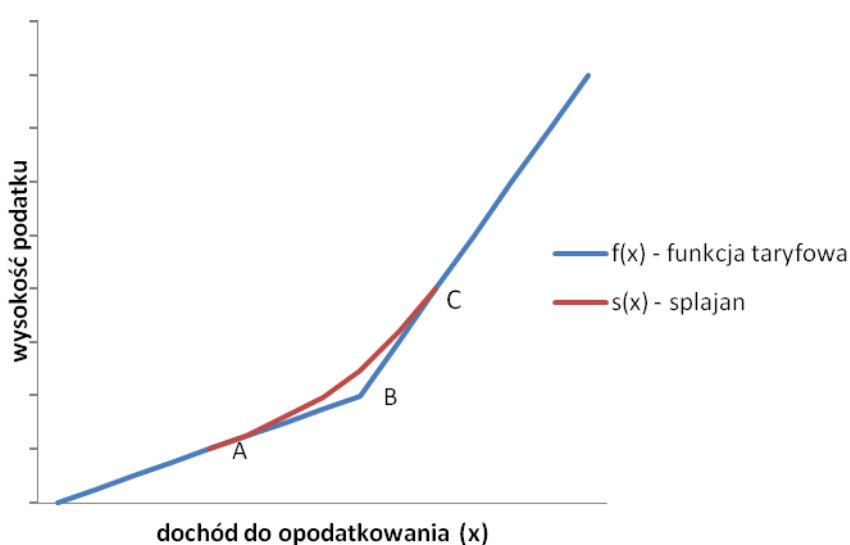
$$\eta_1 + \eta_2 = 1$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2, m_1, m_2, m_3 \in \{0,1\}$$

W rozdziałach empirycznych pracy zawarto wprowadzić modele bardziej skomplikowane, jednak ich istota została całkowicie oparta na powyższej koncepcji. Wyższy stopień skomplikowania polega jedynie na uwzględnieniu większej ilości alternatyw podatkowych. W podobny sposób skonstruowano także modele służące do rozwiązania problemu podatkowo optymalnego podziału zysku na oba kraje.

W pracy sporo miejsca poświęcono problematyce związanej z interpolacją funkcji taryfowych. Zarówno polska funkcja taryfowa wynikająca z opodatkowania na zasadach ogólnych według skali podatkowej, jak również funkcja taryfowa niemieckiego podatku dochodowego od osób fizycznych posiadają punkty nieróżniczkowalne, co w przypadku zadań optymalizacyjnych wymusza przeprowadzenie stosownej interpolacji. Przeprowadzając obliczenia metodami interpolacji wielomianowej (bazy jednomianowe, bazy Lagrange'a, bazy Newtona) oraz przy użyciu funkcji sklepanych autor wykazał, że do zastosowań optymalizacyjnych będących przedmiotem pracy najbardziej przydatną jest ostatnia z wymienionych metod. Jej istotę zilustrowano na rys. 4.

**Rys. 4. Splejan funkcji taryfowej z jednym punktem nieróżniczkowalnym.**



Przedstawiona na rys. 4 funkcja taryfowa  $f(x)$  jest definiowana w dwóch przedziałach:

$$f(x) = \begin{cases} f_d(x) & \text{dla } x < x_B \\ f_g(x) & \text{dla } x \geq x_B \end{cases}$$

Funkcja ta posiada punkt nieróżniczkowalny B. Należy znaleźć funkcję wielomianową  $s(x)$ , która jest ciągła oraz dwukrotnie różniczkowalna w punktach A i C. Punkty A i C muszą przy tym zostać tak dobrane, aby odchylenie splejanu od funkcji taryfowej było możliwie jak najmniejsze. Cel ten osiągnięto poprzez rozwiązanie zadania optymalizacyjnego, w którym funkcję celu stanowi wielkość powierzchni ograniczonej funkcją taryfową oraz poszukiwanym splejanem, natomiast warunki stanowi układ równań gwarantujący ciągłość i dwukrotną różniczkowalność funkcji wielomianowej:

$$\min_{x_A, x_C} \left[ \left( \int_{x_A}^{x_C} [f(x) - s(x)] dx \right)^2 \right]$$

$$f(x_A) = a_0 + a_1 \cdot x_d + a_2 \cdot x_d^2 + a_3 \cdot x_d^3 + a_4 \cdot x_d^4 + a_5 \cdot x_d^5$$

$$f(x_C) = a_0 + a_1 \cdot x_g + a_2 \cdot x_g^2 + a_3 \cdot x_g^3 + a_4 \cdot x_g^4 + a_5 \cdot x_g^5$$

$$f'(x_A) = a_1 + 2a_2 \cdot x_d + 3a_3 \cdot x_d^2 + 4a_4 \cdot x_d^3 + 5a_5 \cdot x_d^4$$

$$f'(x_C) = a_1 + 2a_2 \cdot x_g + 3a_3 \cdot x_g^2 + 4a_4 \cdot x_g^3 + 5a_5 \cdot x_g^4$$

$$f''(x_A) = 2a_2 + 6a_3 \cdot x_d + 12a_4 \cdot x_d^2 + 20a_5 \cdot x_d^3$$

$$f''(x_C) = 2a_2 + 6a_3 \cdot x_g + 12a_4 \cdot x_g^2 + 20a_5 \cdot x_g^3$$

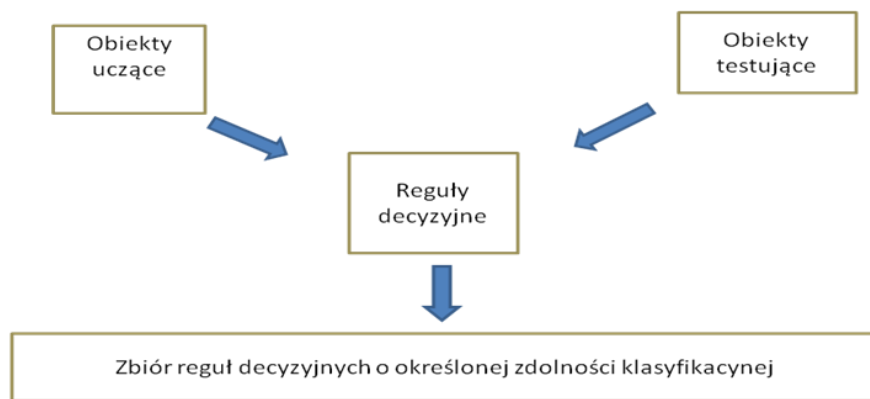
Rozwiązanie stanowią wartości rzędnych punktów A i C oraz współczynniki  $a_0, \dots, a_5$ , poszukiwanej funkcji wielomianowej  $s(x)$ .

Diametralnie inną metodą rozwiązania problemu decyzyjnego wyboru miejsca opodatkowania jest zaproponowana w pracy procedura wykorzystująca reguły decyzyjne oparte na teorii zbiorów przybliżonych. Charakteryzuje się ono dużą prostotą pozwalającą na jej szerokie praktyczne zastosowanie w doradztwie podatkowym.

Jednym z głównych celów analizy danych przeprowadzanej przy pomocy metod teorii zbiorów przybliżonych było zbudowanie za pomocą obiektów znanych (tzw. obiektów uczących) uniwersalnego systemu pozwalającego na klasyfikację obiektów

nowych. System ten został oparty na zestawie reguł decyzyjnych wygenerowanych metodami teorii zbiorów przybliżonych. Proces klasyfikacji ma być przy tym możliwy również w przypadku występowania niedokładnych danych, powodujących ewentualną nierozróżnialność stosowanych obiektów. Należy przy tym zauważyć, iż wybór miejsca opodatkowania jest również swego rodzaju klasyfikacją, której podlegają określone obiekty odpowiadające konkretnym podatnikom. Zadanie polega wówczas na przyporządkowaniu (sklasyfikowaniu) obiektu do najkorzystniejszego miejsca opodatkowania. Rys. 3 przedstawia uproszczony schemat budowy modelu klasyfikującego, polegającego na indukcji reguł decyzyjnych opartych na teorii zbiorów przybliżonych.

**Rys. 3. Procedura tworzenia reguł decyzyjnych.**



Źródło: opracowanie własne

System wspomagający rozwiązanie problemu decyzyjnego wyboru miejsca opodatkowania stanowi zbiór reguł decyzyjnych wygenerowanych za pomocą opracowanego przez autora oprogramowania opartego na przekształceniach macierzy rozróżnialności przy użyciu praw algebry Boole'a.

Punktem wyjścia jest tablica decyzyjna, definiowana jako

$$ET = (U, C, D, V, f), \text{ gdzie:}$$

U - niepusty i skończony zbiór obiektów stanowiących poszczególne „przypadki podatkowe” - uniwersum,

- C - zbiór atrybutów warunkowych (przewidywany dochód podatnika z działalności gospodarczej, przewidywane polskie dochody współmałżonka, ilość dzieci),
- D - zbiór atrybutów decyzyjnych określających miejsce opodatkowania (Polska, Niemcy),
- V - zbiór wartości poszczególnych atrybutów ze zbiorów C i D,
- f - funkcja informacji - przyporządkowuje elementom iloczynu kartezyjańskiego zbioru obiektów oraz zbioru atrybutów elementy zbioru wartości atrybutów:

$$U \times C \rightarrow V \qquad U \times D \rightarrow V$$

Uniwersum stanowi 90 rzeczywistych przypadków, dla których za pomocą przeprowadzonej symulacji określono odpowiednie obciążenia podatkowe przy zastosowaniu wszystkich sześciu wyżej przedstawionych sytuacji decyzyjnych. Uzyskane wyniki umożliwiają nadanie odpowiedniej wartości atrybutowi decyzyjnemu określającemu optymalne miejsce opodatkowania (1 - Niemcy; 0 - Polska).

Indukcja reguł decyzyjnych na podstawie tablicy decyzyjnej odbywa się w następujących etapach:

1. Dyskretyzacja wartości atrybutów warunkowych - podział na przedziały wartości. Rozmiary dochodów z działalności gospodarczej podatnika zostały podzielone na sześć, natomiast polskie dochody współmałżonka na pięć przedziałów wartości.
2. Eliminacja ewentualnych niespójności z tablicy decyzyjnej.

Tablica decyzyjna jest spójna, jeśli dla każdej pary obiektów równość wartości atrybutów warunkowych implikuje równość wartości atrybutów decyzyjnych. W celu eliminacji niespójności określamy relację nierozróżnialności względem zbioru atrybutów warunkowych:

$$IND(C) = \left\{ (x, y) \in U \times U: \text{dla każdego } c \in C \text{ spełniona jest równość:} \right. \\ \left. f(x, c) = f(y, c) \right\}$$

W następnym etapie zostają wyznaczone zbiory:

$$IC(x) = \{y \in U: (x, y) \in IND(C)\}$$



Zbiory te zawierają wszystkie obiekty, które przy uwzględnieniu wszystkich atrybutów warunkowych są nierozróżnialne.

Uniwersum zostaje podzielone na dwie klasy decyzyjne:

$$U = U_1 + U_0; \quad U_1 = \{x \in U: f(x, d) = 1\}; \quad U_0 = \{x \in U: f(x, d) = 0\}$$

Dla obu klas zostają wyznaczone dolne i górne przybliżenia:

$$\underline{B}U_1 = \{x \in U : IC(x) \subset U_1\}$$

$$\overline{B}U_1 = \{x \in U : IC(x) \cap U_1 \neq \emptyset\}$$

$$\underline{B}U_0 = \{x \in U : IC(x) \subset U_0\}$$

$$\overline{B}U_0 = \{x \in U : IC(x) \cap U_0 \neq \emptyset\}$$

Wyznaczamy dokładności przybliżeń:

$$Gd(U1) = |\underline{B}U_1| / |U|$$

$$Gd(U0) = |\underline{B}U_0| / |U|$$

$$Gg(U1) = |\overline{B}U_1| / |U|$$

$$Gg(U0) = |\overline{B}U_0| / |U|$$

Niespójne obiekty należące do klasy o niższej dokładności przybliżeń zostają wyeliminowane z tabeli decyzyjnej. Odpowiadające im obiekty należące do klasy o wyższej dokładności przybliżeń pozostają w tabeli decyzyjnej, oznaczone jako obiekty reprezentujące reguły niedeterministyczne.

### 3. Budowa macierzy rozróżnialności względem wartości atrybutu decyzyjnego.

Dana jest tablica decyzyjna  $ET = (U, C, D, V, f)$ ,

$$\text{gdzie } U = \{x_1, \dots, x_n\} \quad D = \{d\} \quad C = \{c_1, \dots, c_m\} \quad U = U_1 \cup U_2,$$

$$U_1 = \{x \in U: f(x, d) = 1\}, \quad |U_1| = p$$

$$U_0 = \{x \in U: f(x, d) = 0\}, \quad |U_0| = n - p$$

Macierz rozróżnialności definiujemy jako:

$$UM(ET) = [a_{ij}]_{p \times (n-p)}$$

gdzie:  $a_{i,j} = \{c \in C: f(x_i, c) \neq f(x_j, c), \text{ dla } i = 1, \dots, p \text{ oraz } j = 1, \dots, (n - p)\}$ .

Poszczególne wiersze odpowiadają obiektom, dla których wartość atrybutu decyzyjnego przyjmuje wartość  $f(x_i, d) = 1$  natomiast kolumny reprezentują obiekty spełniające warunek  $f(x_i, d) = 0$ . Jak wynika z przedstawionej definicji, elementy macierzy rozróżnialności zawierają tylko te atrybuty warunkowe, które posiadają dla danych dwóch obiektów różne wartości.

#### 4. Lokalne funkcje rozróżnialności.

Dla wszystkich obiektów, dla których atrybut decyzyjny  $d$  przyjmuje wartość 1, tworzy się boolowską lokalną funkcję rozróżnialności

$$f_o(x_i) = \bigcap_{k=1, \dots, (n-p)} \cup \{c \in C: c \in a_{i,k}\}$$

Symbole  $\cap, \cup$  oznaczają odpowiednio koniunkcję i alternatywę wyrażeń boolowskich.

#### 5. Tworzenie reguł reguł decyzyjnych z poszczególnych lokalnych funkcji rozróżnialności.

Korzystając z praw algebry Boole'a przekształcamy lokalne funkcje rozróżnialności do dysjunkcyjnej postaci normalnej. W tak otrzymanej dysjunkcyjnej postaci minimalnej poszczególne koniunkcje stanowią części warunkowe utworzonych reguł decyzyjnych. Reguły odpowiadające obiektom oznaczonym w ramach eliminacji niespójności określamy jako reguły niepewne.

Dane empiryczne stanowiły 90 rzeczywistych przypadków podatkowych zebranych w berlińskim biurze rachunkowym. Na ich podstawie zostało wygenerowanych 16 reguł decyzyjnych wskazujących na wybór miejsca opodatkowania w Niemczech, z których 15 to reguły pewne oraz jedna reguła przybliżona:

$0 < \text{dochód z działalności} < 40.000$		[52]
$40.000 \leq \text{dochód z działalności} < 60.000$		[19]
$(60.000 \leq \text{dochód z działalności} < 70.000)$	& (dzieci = 1)	[1]
$(70.000 \leq \text{dochód z działalności} < 80.000)$	& (dzieci = 1)	[1]
$(70.000 \leq \text{dochód z działalności} < 80.000)$	& (dzieci = 2)	[1]
$(70.000 \leq \text{dochód z działalności} < 80.000)$	& (dzieci = 3)	[1]
$(80.000 \leq \text{dochód z działalności} < 100.000)$	& (dzieci = 3)	[1]
$(0 \leq \text{polski dochód współmałżonka} < 12.000)$	& (dzieci = 3)	[2]
$(12.000 \leq \text{polski dochód współmałżonka} < 40.000)$	& (dzieci = 1)	[6]
$(12.000 \leq \text{polski dochód współmałżonka} < 40.000)$	& (dzieci = 2)	[1]
$(12.000 \leq \text{polski dochód współmałżonka} < 40.000)$	& (dzieci = 3)	[3]
$(40.000 \leq \text{polski dochód współmałżonka} < 60.000)$		[15]
$(60.000 \leq \text{polski dochód współmałżonka} < 80.000)$	& (dzieci = 3)	[1]
$(\text{polski dochód współmałżonka} \geq 80.000)$	& (dzieci = 1)	[5]
$(\text{polski dochód współmałżonka} \geq 80.000)$	& (dzieci = 2)	[3]
$(\text{polski dochód współmałżonka} \geq 80.000)$	& (dzieci $\geq 2$ )	[3]

W nawiasie kwadratowym została podana ilość obiektów pokrywana przez daną regułę.

Powyższe reguły przetestowano na 70 nowych obiektach uzyskując następujące rezultaty:

Całkowita ilość obiektów testujących	$n = 70$
Ilość obiektów poprawnie sklasyfikowanych	$n = 62$
Współczynnik błędu	$\varepsilon = 8/70 = 0,1143$
Współczynnik dokładności	$\eta = 62/70 = 0,8857$

Analizując otrzymane rezultaty należy stwierdzić, że osiągnięty wynik jest zadawalający, a zaproponowana metoda może stanowić skuteczne instrumentarium wspierające decyzje wyboru miejsca opodatkowania. Jednocześnie należy zwrócić uwagę na fakt, iż zarówno dane służące do indukcji reguł decyzyjnych jak i dane testowe pochodziły z jednego biura rachunkowego. Chcąc uzyskać reguły bardziej uniwersalne należałoby uwzględnić dane z większej ilości źródeł.

## 5. Wnioski

Należy stwierdzić, że oba zaproponowane w pracy podejścia stanowią skuteczne instrumentarium mogące istotnie wspierać procesy decyzyjne transgranicznego wyboru miejsca opodatkowania. Uzyskane rezultaty oraz porównanie zaprezentowanych procedur z klasycznymi metodami porównań podatkowych jednoznacznie potwierdziły postawioną przez autora hipotezę badawczą, zakładającą, iż zastosowanie zaawansowanych metod wspomaganie decyzji pozwala na efektywniejszy wybór miejsca opodatkowania w celu maksymalizacji korzyści. Poprzez wprowadzenie określonych restrykcji można w dużym stopniu uwzględnić preferencje decydenta uwzględniające na przykład maksymalne lub minimalne zyski jakie jest on gotów wypracować w danym kraju lub też pewne ograniczenia struktury ich podziału.

Istotną zaletą metody wyboru miejsca opodatkowania za pomocą modeli mieszanych całkowitoliczbowo-nieliniowych wykorzystujących binarne zmienne decyzyjne jest automatyczny wybór formy opodatkowania. W przeciwieństwie do stosowanej w praktyce symulacji kazuistycznej rozwiązanie zadania optymalizacji dostarcza decydentowi obok podstawowej informacji odnośnie miejsca opodatkowania również decyzje dotyczące wyboru rodzaju obowiązku podatkowego, sposobu skorzystania z ulgi na dzieci oraz ewentualnego wyboru łącznego rozliczenia małżeńskiego w obu krajach. W przypadku polskiego i niemieckiego prawa podatkowego wzajemne kombinacje tego rodzaju opcji powodują konieczność zasymulowania kilkunastu scenariuszy podatkowych, co wpływa na małą efektywność metod symulacyjnych.

Zaproponowana przez autora metoda pozwala także na ważną z punktu widzenia procesu decyzyjnego analizę wrażliwości podejmowanej decyzji na zmiany określonych parametrów. Analiza ta może zostać skutecznie wykorzystana do szeroko rozumianych porównań istniejących systemów podatkowych. Może ona stanowić również ważny instrument wspomagający prace nad wszelkimi zmianami systemu podatkowego danego państwa.

Inną, szeroko stosowaną metodą wspierającą decyzje i analizy podatkowe, jest rachunek podatków cząstkowych. W przeciwieństwie do zaproponowanego w pracy modelu opartego na programowaniu matematycznym nie pozwala on jednak na prowadzenie obliczeń w pełnym spektrum dochodowym. Ograniczenie do jednego przedziału liniowej funkcji taryfowej istotnie zawęża jego praktyczne zastosowanie.

Dalsze prace nad udoskonaleniem zaproponowanych modeli powinny być prowadzone w dwóch kierunkach:

1. Rozszerzenie modelu o dodatkowy komponent odpowiadający obowiązkowemu w obu krajach ubezpieczeniu zdrowotnemu. Jest to jednak zadanie stosunkowo złożone z racji ograniczonej porównywalności świadczeń ubezpieczeniowych. Należałoby uwzględnić z jednej strony koszt i wartość świadczenia, jak również preferencje potencjalnego decydenta i związaną z tym użyteczność.
2. W pracy jako główny parametr decyzyjny wybrano przewidywany całkowity zysk z działalności przedsiębiorcy. Założono przy tym, iż może zostać osiągnięty zamiennie w obu państwach. Nasuwa się jednak pytanie, czy przy określonych mocach przerobowych faktycznie możliwe jest osiągnięcie porównywalnego zysku w obu krajach. Przepisy prawne określające zasady ustalania zysku z działalności gospodarczej nie stanowią problemu, bowiem są one prawie identyczne. Przeszkodą mogą być jednak różniące się w obu krajach koszty prowadzenia działalności. Najprostszym sposobem rozwiązania tego problemu jest założenie równoważności nie zysków, a mocy przerobowych w obu krajach. W scenariuszu odpowiadającemu podziałowi zysków prowadzi to wówczas do następujących zależności:

$$B = b_n + b_{pl}$$

$$x = ROS_n \cdot b_n; \quad y = ROS_{pl} \cdot b_{pl}$$

gdzie:

B – maksymalnie możliwe całkowite obroty - wartość stała,

$b_n, b_{pl}$  – zmienne decyzyjne reprezentujące wysokość obrotów  
w Niemczech i w Polsce ,  
 $ROS_n$  – statystyczna rentowność sprzedaży w Niemczech,  
 $ROS_{pl}$  – statystyczna rentowność sprzedaży w Polsce,  
 $x, y$  – przewidywane dochody w Niemczech oraz w Polsce.

Niedogodnością powyższego podejścia jest konieczność stosowania branżowych statystycznych rentowności sprzedaży, ponieważ wskaźniki te przyjmują dla różnych gałęzi gospodarki skrajnie różne wartości. Wymusza to stosowanie algebraicznie zróżnicowanych modeli, co jest poważną wadą z punktu widzenia ich praktycznej aplikacji.

Metody oparte na bazie zbiorów przybliżonych znalazły w ostatnich latach zastosowanie w wielu pozornie nie związanych ze sobą dziedzinach. Wygenerowane reguły decyzyjne stosuje się w wielu działach ekonomii, medycyny, w rolnictwie czy też w diagnostyce technicznej. Zaproponowana w pracy ich aplikacja do rozwiązywania problemu decyzyjnego wyboru miejsca opodatkowania stanowi pierwszą próbę użycia metod zbiorów przybliżonych w planowaniu podatkowym. Na podstawie uzyskanych wyników należy stwierdzić, iż okazały się one bardzo efektywnym narzędziem, które z powodzeniem powinno znaleźć szerokie zastosowanie także w innych podatkowych problemach decyzyjnych.

Proces generowania reguł decyzyjnych jest stosunkowo skomplikowany i możliwy jedynie przy użyciu zaawansowanego oprogramowania. Uzyskane reguły są jednak bardzo proste i czytelne, co stanowi olbrzymią zaletę tej formy rozwiązania procesu decyzyjnego transgranicznego wyboru miejsca opodatkowania.

Istnieje możliwość wykorzystania reguł decyzyjnych bazujących na bazie teorii zbiorów przybliżonych także do określenia sposobu opodatkowania, czyli do wyboru odpowiedniej opcji podatkowej w obu krajach. Cel ten można w łatwy sposób osiągnąć poprzez odpowiednie zwiększenie ilości atrybutów decyzyjnych. Konieczne jest jednak posiadanie zdecydowanie szerszej wiedzy eksperckiej w formie rzeczywistych przypadków podatkowych, aby uzyskany zestaw reguł był wystarczająco efektywny.