ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU SZCZECIŃSKIEGO

NR 768 FINANSE, RYNKI FINANSOWE, UBEZPIECZENIA NR 63 2013

KRZYSZTOF PIASECKI
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

BEHAWIORALNE ASPEKTY ARYTMETYKI FINANSOWEJ

Streszczenie

W pracy przedstawiono dwa studia przypadków: wpływ finansów behawioralnych na arytmetykę finansową i wpływ normatywnych modeli matematycznych na finanse behawioralne. Kombinacja tych dwóch przykładów dowodzi, że matematyka finansowa i finanse behawioralne są dopełniającymi się nawzajem sposobami poznania świata finansów realnych.

Slowa kluczowe: arytmetyka finansowa, aspekty behawioralne

Wprowadzenie

Intensywny wzrost obrotów na rynkach finansowych oraz narastająca złożoność tych rynków wywołała naturalny popyt na analizę naukową tych zjawisk. Oczekiwano modeli normatywnych ułatwiających inwestorom poruszanie się po rynkach finansowych. Istotną rolę w tych poszukiwaniach odegrała matematyka. Uzyskane tą drogą modele normatywne rynku powszechnie zostały uznane za poprawny obraz realnego rynku finansowego. Wnioski uzyskiwane na gruncie tych modeli pozwalały na formułowanie reguł zarządzania inwestycjami finansowymi, które zwiększają szanse na wysokie bezpieczne zarobki. Reguły były na tyle przekonujące, że zdecydowania większość uczestników rynków finansowych deklarowała ich stosowanie w praktyce inwestycyjnej. Szybko okazało się jednak, że aktywnie działający inwestorzy nie stosują się ściśle do tych reguł. To było przesłanką dla dalszej modernizacji formalnych teorii rynków kapitałowych.

Ewolucja teorii rynku kapitałowego nie usuwała jednak rozbieżności pomiędzy teorią i praktyką rynkową. Zachowania inwestorów nadal odbiegały od racjonalnych zachowań przewidzianych przez teorię. Ujawnienie tych anomalii w jednoznaczny sposób dowiodło istnienia przesłanek decyzyjnych niezależnych od analizy technicznej lub analizy fundamentalnej.

Zwróciło to uwagę na kolejny aspekt obrazu rynków finansowych. Nadrzędnym podmiotem działań gospodarczo-finansowych jest człowiek podejmujący decyzje wpływające na przebieg procesów finansowych. Takie decyzje są determinowane przez postawione cele normatywne oraz przez psychologiczne aspekty decydowania. Wyróżnienie tego drugiego czynnika prowadzi wprost do wyodrębnienia się finansów behawioralnych. Pierwotnie uznano, że głównym instrumentarium poznawczym finansów behawioralnych będą narzędzia badawcze stosowane w obrębie psychologii. Narzędzia te miały służyć do wyjaśnienia tych zjawisk rynkowych, które z punktu widzenia normatywnej teorii rynków kapitałowych były postrzegane jako paradoksy. W ten sposób wyniki badawcze finansów behawioralnych przeciwstawiano normatywnym teoriom wyprowadzonym z zastosowaniem matematyki.

Pomimo tego zabiegu obserwacje poczynione na gruncie finansów behawioralnych prowadzą do uzyskania teorii formalnych objaśniających behawioralne paradoksy rynków finansowych. Zatem narodzenie się finansów behawioralnych nie oznacza, że wyjaśniają mechanizmy rynków finansowy w sposób niezależny od matematyki. W literaturze przedmiotu można znaleźć wiele dowodów prawdziwości tezy głoszącej, że formalne modele normatywne stanowią integralną część finansów behawioralnych. W prezentowanym artykule zamierzam przeprowadzić kolejny dowód tej tezy.

1. Podstawy arytmetyki finansowej w świetle teorii użyteczności

Fundamentalnym założeniem arytmetyki finansowej jest pewnik, że wartość pieniądza rośnie wraz z upływem czasu, po jakim będzie spożytkowany. Założenie to jest uzasadniane na ogół poprzez analizę równania Fishera wymiany pieniądza. Korzysta się tutaj z normatywnego założenia o stałej ilości pieniądza. Z tego względu rozpatrywaną w arytmetyce finansowej wartość pieniądza nazywa się wartością normatywną pieniądza. Proces przyrostu wartości normatywnej nazywamy procesem aprecjacji kapitału. Z drugiej strony stosowana praktyka gospodarczo-finansowa powoduje przyrost ilości pieniądza szybszy od przyrostu wolumenu produkcji. Obserwuje się wtedy spadek wartości realnej pieniądza. Oznacza to, że wartości normatywnej pieniądza nie można identyfikować z jego wartością realną. Rodzi to pytanie o istotę podstawowych funkcji arytmetyki finansowej.

Każda z płatności jest reprezentowana przez strumień finansowy (t,C), gdzie $t \in \Theta \subseteq [0,+\infty[$ jest momentem przepływu strumienia o wartości nominalnej $C \in \mathbb{R}$. W szczególnym przypadku Θ może być zbiorem momentów kapitalizacji lub nieujemną półprostą czasu. Każdy z tych strumieni finansowych może być realizowaną należnością lub wymaganym zobowiązaniem. Wartość nominalna każdej należności jest dodatnia. Zobowiązania obciążające dłużnika stanowią zawsze należność wierzyciela. W tej sytuacji wartość zobowiązania jest równa wziętej ze znakiem minus wartości należności odpowiadającej temu zobowiązaniu.

Referując podstawy teorii ekonomii, von Mises [1962] przedstawił regułę preferencji czasowej. Z reguły wynika, że inwestor, porównując dwie wpłaty o równej wartości nominalnej, preferuje zawsze wpłatę szybciej dostępną. Z drugiej strony jest oczywiste, że każdy podmiot ekonomiczny w działaniu kieruje się regułą preferencji majątkowej. Reguła ta oznacza, że inwestor, porównując dwie równocześnie dostępne wpłaty, wybiera zawsze wpłatę o wyższej wartości. Iloczyn obu tych relacji daje porównanie wielokryterialne określone na zbiorze wszystkich strumieni finansowych $\Phi = \Theta \times \mathbb{R}$. Porównanie wyznacza funkcję $U : \Phi \to \mathbb{R}$ użyteczności strumieni finansowych. Kwestią umowną jest wyskalowanie wartości funkcji użyteczności. W pracy [Piasecki 2012] dowiedziono, że jeśli użyteczność ta dodatkowo spełnia warunek brzegowy

$$\forall C \in \mathbb{R} : U(0,C) = C \ , \tag{1.1}$$

to wtedy wartość bieżąca $PV : \Phi \to \mathbb{R}$ jest określona przez tożsamość

$$PV(t,C) = U(t,C). \tag{1.2}$$

Wartość bieżąca dowolnego strumienia finansowego jest identyczna z jego użytecznością, co w pełni wyjaśnia istotę pojęcia wartości bieżącej. Określona w ten sposób wartość bieżąca może mieć subiektywny charakter. Pozwala to uwypuklić behawioralne aspekty dyskonta. Tak zdefiniowanej funkcji wartości bieżącej przysługują m.in. następujące właściwości

$$\forall C \in \mathbb{R}: \quad PV(0,C) = C, \tag{1.3}$$

$$\forall (t_1,C),(t_2,C) \in \Phi^+: \ t_1 < t_2 \Rightarrow PV(t_1,C) > PV(t_2,C), \tag{1.4}$$

$$\forall (t,C_1),(t,C_2) \in \Phi: \ C_1 < C_2 \Rightarrow PV(t,C_1) < PV(t,C_2), \tag{1.5}$$

gdzie $\Phi^+ = \Theta \times \mathbb{R}^+ \subset \Phi$ jest zbiorem wszystkich należności. Ponadto dowolną funkcję wartości bieżącej danej przez tożsamość (1.2) można przedstawić, jako iloczyn

$$PV(t,C) = C \cdot v(t,C), \tag{1.6}$$

gdzie czynnik dyskontujący $v : \Phi \to]0;1]$ jest nierosnącą funkcją czasu spełniającą warunek brzegowy:

$$v(0,C) = 1. \tag{1.7}$$

Jeśli dodatkowo czynnik dyskontujący jest malejącą funkcją dodatniej wartości kapitału, to w przebiegu zmienności funkcji wartości bieżącej ujawnia się efekt synergii kapitału.

Pierwsze prawo Gossena informuje o tym, że krańcowa użyteczność bogactwa maleje. Jeśli funkcja $U : \Phi^+ \to \mathbb{R}^+$ spełnia warunek malejącej krańcowej użyteczności bogactwa, to wtedy dla funkcji $PV : \Phi^+ \to \mathbb{R}^+$ wartości bieżącej należności możemy zapisać

$$\forall (t,C_1),(t,C_2) \in \Phi^+ \ \forall \alpha \in]0;1[:$$

$$\alpha \cdot PV(t,C_1) + (1-\alpha) \cdot PV(t,C_2) < PV(t, \alpha \cdot C_1 + (1-\alpha) \cdot C_2). \tag{1.8}$$

Wartość bieżąca jest funkcją wklęsłą nad zbiorem wszystkich należności. W pracy [Piasecki 2012] dowiedziono, że spełnienie pierwszego prawa Gossena jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby w przebiegu zmienności funkcji wartości bieżącej $PV : \Phi \to \mathbb{R}$ ujawnił się efekt synergii kapitału.

Tezę tę warto zestawić z wynikami eksperymentów poświęconych intuicyjnemu dyskontowaniu odroczonych wypłat. Empiryczne badania stanowią jeden z nurtów poznawczych finansów behawioralnych. Przebieg takich doświadczeń został opisany w artykułach [Du, Green, Myerson 2002; Kirby, Santiesteban

2003; Shelley 1993]. Zebrane tą drogą obserwacje dowodzą, że pewni inwestorzy stosują *implicite* ten czynnik dyskontujący, który jest funkcją rosnącą dodatniej wartości kapitału. Można wtedy pokazać, że do dyskontowania przyszłych wypłat inwestorzy używają wypukłej funkcji wartości bieżącej. Na ogół równocześnie inwestorzy, wyznaczając przyszłe ekwiwalenty bieżących wypłat, uwzględniają efekt synergii kapitału. Oznacza to, że mogą stosować równocześnie dwie różne funkcje użyteczności kapitału. Do dyskontowania odroczonych wypłat stosują wklęsłą funkcję użyteczności, podczas gdy do wyznaczania ekwiwalentów bieżących wypłat stosują wypukłą funkcję użyteczności. Stwierdzenie to otwiera przed arytmetyką finansową nowy obszar badań formalnych.

Dzięki portfelowej teorii Markowitza [1952] upowszechnił się pogląd głoszący, że należy preferować dywersyfikacje inwestycji rozumianą jako rozdzielenie posiadanych zasobów pomiędzy różne inwestycje. W pracy [Piasecki 2012] wykazano, że przyjęcia założenia o preferowaniu dywersyfikacji inwestycji jest równoważne spełnieniu przez wartość bieżącą nierówności

$$\forall (t,C_1),(t,C_2)\in\Phi: \quad PV(t,C_1)+PV(t,C_2)\geq PV(t,C_1+C_2). \tag{1.9}$$

Wtedy dla $C>0$ mamy

$$v(t,C)\geq v(t,-C). \tag{1.10}$$

Pozwala to wnioskować, że preferując dywersyfikację inwestycji zobowiązania dyskontujemy silniej niż należności. Z drugiej strony Thaler [1981] i Loewenstein [1988] w eksperymentach wykazują, że możliwe jest zaprzeczenie nierówności (1.10). Oznacza to, że w praktyce finansów jest możliwe odrzucenie pewnika o potencjalnych korzyściach płynących z dywersyfikacji inwestycji. W pracy [Piasecki 2012] wykazano ponadto, że przyjęcie założenia o preferowaniu dywersyfikacji inwestycji wywołuje efekt dźwigni finansowej.

W szczególnym przypadku, oceniając przyszłe przepływy finansowe, można pominąć potencjalne korzyści uzyskiwane dzięki dywersyfikacji inwestycji. Mówi się wtedy o neutralności efektu dywersyfikacji. W pracy [Piasecki 2012] wykazano, że przyjęcia założenia o neutralności efektu dywersyfikacji jest równoważne spełnieniu przez wartość bieżącą warunku

$$\forall (t,C_1),(t,C_2)\in\Phi: \quad PV(t,C_1)+PV(t,C_2)=PV(t,C_1+C_2). \tag{1.11}$$

W pracy [Piasecki 2005] wykazano, że warunek (1.11) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wartość bieżąca $PV:\Phi\rightarrow\mathbb{R}$ spełniająca warunki (1.3) i (1.4) była dana przez tożsamość

$$PV\left(t,C\right)=C\cdot v\left(t,1\right). \tag{1.12}$$

Tak określona wartość bieżąca jest funkcją liniową wartości kapitału. Oznacza to, że neutralność dywersyfikacji jest warunkiem koniecznym i dostatecznym dla odrzucenia pierwszego prawa Gossena. Odrzucenie takie oznacza jedynie, że przy ocenie przepływów finansowych pomija się efekt malejącej marginalnej użyteczności.

W pracy Peccatiego [1972] wartość bieżącą $PV:\Phi\rightarrow\mathbb{R}$ zdefiniowano, jako dowolną funkcję spełniającą warunki (1.3), (1.4) i (1.11). Przykładami tak zdefiniowanej funkcji wartości bieżącej są dyskonto proste rzeczywiste, dyskonto składane, dyskonto składane handlowe i dyskonto ciągłe. Zatem definicja Peccatiego może stanowić teoretyczną podstawę „klasycznej" arytmetyki finansowej w wersji opisanej w pracy Edwarda Smagi [1999]. W tym rozdziale pokazano, że stosowanie reguł „klasycznej" arytmetyki finansowej oznacza, że przy ocenie przepływów finansowych pomija się efekty dywersyfikacji inwestycji, synergii kapitału i malejącej marginalnej użyteczności bogactwa. Spostrzeżenie to zachęca do poszukiwania aplikacyjnie przydatnych uogólnień definicji wartości przyszłej.

Uogólnienie klasycznej definicji Peccatiego wartości bieżącej można uzyskać poprzez zastąpienie warunku (1.11) przez bardziej ogólną nierówność (1.5).

Warto tutaj zwrócić uwagę na fakt [Piasecki 2012], że nierówność (1.5) jest warunkiem koniecznych dla zachodzenia efektu dywersyfikacji ryzyka (1.9). Powyżej wspomniano już, że założenia (1.9) o preferowaniu dywersyfikacji inwestycji jest warunkiem dostatecznym dla ujawnienia się efektu synergii kapitału. Z drugiej strony ujawnienie się efektu synergii kapitału jest równoważne zachodzeniu prawa (1.8) malejącej użyteczności marginalnej bogactwa. Spostrzeżenie to skłania do podjęcia szczegółowych badań nad trzema wariantami definicji uogólnionej wartości bieżącej:

– uogólniona wartość bieżąca $PV:\Phi\rightarrow\mathbb{R}$ jest to dowolna funkcja spełniająca warunki (1.3), (1.4) i (1.5),
– uogólniona wartość bieżąca $PV:\Phi\rightarrow\mathbb{R}$ jest to dowolna funkcja spełniająca warunki (1.3), (1.4) i (1.9),

– uogólniona wartość bieżąca $PV : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ jest to dowolna funkcja spełniająca warunki (1.3), (1.4) i (1.8).

Takie mogą być dalsze kierunki badań normatywnych aspektów arytmetyki finansowej.

Przedstawione w tym rozdziale rozważania na temat wzajemnych relacji pomiędzy użytecznością bogactwa a wartością bieżącą wykazują logiczną spójność formalnych modeli ekonomii i finansów. Szukanie tych podobieństw jest szczególnie istotne teraz, kiedy wszyscy staliśmy się uczestnikami globalnego kryzysu finansowego wywołanego przez zarządzanie finansami w oderwaniu od fundamentalnych podstaw stwarzanych przez gospodarkę.

Wykazanie, że wartość bieżąca danego strumienia finansowego jest identyczna z użytecznością tego strumienia, wskazuje na subiektywny charakter pojęcia wartości bieżącej. W tej sytuacji otrzymano podwaliny teoretyczne pod budowę modeli finansów behawioralnych wykorzystujących subiektywne oceny wartości bieżącej.

Na marginesie powyższych rozważań warto też dostrzec, że dziedzina badań arytmetyki finansowej w coraz większym stopniu wykracza poza domenę teorii procentu. W tej sytuacji arytmetykę finansowa należy traktować jako rozszerzenie opartej na obiektywnych przesłankach teorii procentu. Wobec subiektywnych aspektów podejmowanej problematyki dynamicznej oceny pieniądza jest to rozszerzenie istotne, co zostało pokazane w tym rozdziale.

2. Behawioralne aspekty dyskontowania

W poprzednim rozdziale pominięto całkowicie dyskusję nad wpływem czasu odroczenia na użyteczność strumienia finansowego. Należy jednak pamiętać, że badania takie zostały już podjęte na gruncie finansów behawioralnych.

Każdy przyszły przepływ finansowy jest obarczony ryzykiem terminu. Ryzyko to jest identyfikowane z ryzykiem utraty płynności implikowanym przez wydłużanie się horyzontu czasowego inwestycji. Koszt tego ryzyka zmniejsza wartość bieżącą ocenianego przepływu. Zmniejszenie to nazywa się dyskontem wartości przepływu. W klasycznych modelach arytmetyki finansowej dyskonto zależy od horyzontu czasowego inwestycji i prędkości aprecjacji kapitału mierzonej przy pomocy nominalnej stopy procentowej. Z drugiej strony wartość dyskonta jest implikowana przez ryzyko terminu. W tej sytuacji nie można nie wykluczyć tego, że na ocenę wartości dyskonta ma także wpływ podatność oceniającego na ryzyko. W rozdziale zostanie przedstawiona ta metoda dyskontowania, w której jest uwzględniony wpływ awersji do ryzyka.

Każda metoda dyskontowania kapitału jest określona poprzez przebieg zmienności założonego modelu aprecjacji kapitału. Rozważania ograniczono do przypadku, kiedy przy ocenie przepływów finansowych pomija się efekty dywersyfikacji inwestycji, synergii kapitału i malejącej marginalnej użyteczności bogactwa. Dowolny model dyskonta kapitału można wtedy przedstawić jako model dyskonta ciągłego dany przy pomocy zależności

$$C(t) = PV(t, C) = C \cdot \exp\{-t \cdot y(t)\} \ , \tag{2.1}$$

gdzie stopa spot $y(t)$ określa jednostkową cenę kapitału lokowanego na okres czasu $t > 0$. Atrakcyjność każdej inwestycji rośnie wraz ze wzrostem jednostkowej ceny kapitału. Stąd wartość $y(t)$ stopy spot możemy interpretować jako użyteczność zainwestowania kapitału w inwestycję o ustalonym horyzoncie czasowym $t > 0$.

Już pobieżna analiza modelu oprocentowania ciągłego dowodzi, że trend stopy spot ma ciągłą pierwszą pochodna. Opóźnienie terminu wymagalności kapitału oznacza wzrost ryzyka utraty płynności. Ten wzrost ryzyka inwestor kompensuje sobie wzrostem jednostkowej ceny kapitału. Oznacza, to, że trend stopy spot $y : [0, +\infty[\cdot \mathbb{R}^+$ jest funkcją rosnącą. Teoria finansów pokazuje też, że dowolna stopa spot spełnia dwa kryteria asymptotyczne. Pierwszym z tych kryteriów jest warunek renty wieczystej

$$\exists y_\infty > 0 : \ \lim_{t \to +\infty} y(t) = y_\infty , \tag{2.2}$$

gdzie y_∞ jest stopą renty wieczystej. Kolejnym kryterium jest warunek bieżącej chwilowej stopy natychmiastowej

$$\exists y_0 > 0 : \ \lim_{t \to 0^+} y(t) = y_0 , \tag{2.3}$$

gdzie y_0 jest stopą natychmiastową bieżącej inwestycji zero kuponowej o horyzoncie wymagalności $\Delta t \to 0$. W pracy Larsa Svennsona [1994] stopa y_0 jest identyfikowana z bieżącą stopą O/N. Wobec monotoniczności trendu stopy spot mamy tutaj

$$y_0 < y_\infty . \ (2.4).$$

Wzrost ryzyka utraty płynności implikuje ograniczenie wzrostu ceny jednostkowej kapitału wywołanego opóźnieniem momentu wymagalności. Oznacza to, że wzrost trendu stopy spot jest ograniczony przez awersję do ryzyka. Nie mając dokładniejszych informacji o rozkładzie tej awersji, założono, że jest ona niezależna od horyzontu czasowego inwestycji. Oznacza to, że natężenia tej awersji jest stałe w czasie. Stosując wskaźnik Arrowa-Pratta awersji do ryzyka, założenie to opisano przy pomocy warunku

$$\exists \rho > 0 : -\frac{y''(t)}{y'(t)} = \rho \quad . \tag{2.5}$$

Dodatkowo założono tutaj ciągłość drugiej pochodnej trendu stopy spot. Jedynym rozwiązaniem zadania (2.2), (2.3) i (2.5) jest trend określony przez tożsamość

$$y(t) = y_\infty - (y_\infty - y_0) \cdot \exp\{-\rho \cdot t\} . \tag{2.6}$$

W tej sytuacji funkcja wartości bieżącej $PV(\cdot \mid \rho) : \Phi \to \mathbb{R}$ jest określona przy pomocy tożsamości

$$PV((t, C) \mid \rho) = C \cdot \exp\{t \cdot ((y_\infty - y_0) \cdot \exp\{-\rho \cdot t\} - y_\infty)\} \quad . \tag{2.7}$$

Funkcja ta może zostać wykorzystana do zdyskontowania wartości przyszłego przepływu finansowego (t, C). Stopa dyskonta wynosi wtedy

$$D(t, \rho) = \frac{C - C \cdot \exp\{t \cdot ((y_\infty - y_0) \cdot \exp\{-\rho \cdot t\} - y_\infty)\}}{C} =$$

$$= 1 - \exp\{t \cdot ((y_\infty - y_0) \cdot \exp\{-\rho \cdot t\} - y_\infty)\} . \tag{2.8}$$

W elementarny sposób można wykazać, że wyznaczona powyżej stopa dyskonta jest rosnącą funkcją wskaźnika do awersji.

W sytuacji, gdy awersja do ryzyka jest indywidualną cechą każdego z inwestorów, opisany model może zostać wykorzystany do budowy formalnych modeli finansów behawioralnych. W modelu tym obiektywne czynniki fundamentalne są reprezentowane przez wartości y_0 i y_∞ opisanych powyżej stop procentowych.

Weźmy pod uwagę dowolny papier wartościowy $\mathcal{Y}$ stanowiący przedmiot obrotu na w pełni efektywnym rynku finansowym. W tej sytuacji wszyscy uczestnicy rynku przyjmują identyczną wartość przyszłą $C > 0$ danego papieru wartościowego. W momencie czasowym $t > 0$ instrument ten jest reprezentowany przez strumień finansowy (t, C). Wartość bieżąca tego strumienia jest identyfikowana przez inwestora, jako cena równowagi finansowej instrumentu finansowego $\mathcal{Y}$. Rozważmy teraz parę inwestorów $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ różniących się pomiędzy sobą awersją do ryzyka. Awersja do ryzyka inwestora $\mathcal{P}_i$ jest scharakteryzowana przez wskaźnik awersji do ryzyka o wartości ρ_i. Załóżmy teraz, że inwestor $\mathcal{P}_1$ charakteryzuje się większą awersja do ryzyka niż inwestor $\mathcal{P}_2$. Mamy wtedy

$$\rho_1 > \rho_2, \tag{2.9}$$

co prowadzi ostatecznie do

$$C_{0,1} = PV\left((t, C) \mid \rho_1\right) < PV\left((t, C) \mid \rho_2\right) = C_{0,2}. \tag{2.10}$$

Widać tutaj, że częściowo subiektywnie szacowana cena równowagi maleje wraz ze wzrostem awersji do ryzyka. Obaj inwestorzy obserwują tę samą wartość $\check{C}$ ceny rynkowej. Jeśli wartość ta będzie spełniać warunek

$$C_{0,1} < \check{C} < C_{0,2}, \tag{2.11}$$

to wtedy inwestor $\mathcal{P}_1$ zamierza sprzedać instrument finansowy $\mathcal{Y}$. Równocześnie ten sam instrument planuje kupić inwestor $\mathcal{P}_2$. Popyt na instrument finansowy $\mathcal{Y}$ zgłaszany przez inwestora $\mathcal{P}_2$ jest równoważony przez podaż instrumentu $\mathcal{Y}$ oferowaną przez inwestora $\mathcal{P}_1$. Nierówność (2.11) i jej interpretacja wyjaśniają paradoks utrzymywania się równowagi rynkowej na silnie efektywnym rynku finansowym. W formalny sposób wykazano tutaj, że przesłanką do wyjaśnienia tego paradoksu może być zróżnicowanie awersji poszczególnych inwestorów do ryzyka. Dodatkowo warto zauważyć, że popyt zgłaszany przez inwestora o mniejszej awersji do ryzyka zawsze jest zaspakajany przez podaż zgłaszaną przez inwestora o większej awersji do ryzyka. Wniosek ten sugeruje, że na silnie efektywnych rynkach finansowych kapitał koncentruje się w rękach inwestorów charakteryzujących się dużą skłonnością do ryzyka. Wniosek stanowi swoisty komentarz do obserwowanego w tej chwili globalnego kryzysu finansowego, gdyż jego komentatorzy jednej z przyczyn kryzysu dopatrują się w powszechnym stosowaniu wysoce ryzykownych instrumentów finansowych.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono różne relacje pomiędzy finansami behawioralnymi a matematyką.

W rozdziale 1, dyskutując definicję wartości bieżącej, pokazano, że obserwacje empiryczne poczynione na gruncie finansów behawioralnych wpływają na kierunki matematycznych badań zmierzających do budowy modeli formalnych matematyki finansowej. Zatem finanse behawioralne stanowią inspirację dla matematyki.

W rozdziale 2, omawiając wpływ awersji do ryzyka na metodę dyskonta, pokazano, że wynik dedukcji matematycznej odsłania do rozwiązania nowe problemy finansów behawioralnych. Zatem i matematyka stanowi inspirację dla finansów behawioralnych.

Wszystko to razem dowodzi, że matematyka finansowa i finanse behawioralne nie są przeciwstawnymi sposobami rozważania rzeczywistego obrazu rynków finansowych. Matematyka finansowa i finanse behawioralne są dopełniającymi się nawzajem sposobami poznania świata finansów realnych.

Literatura

Dacey R., Zielonka P. [2005], *A detailed prospect theory explanation of the disposition effect*, „Journal of Behavioral Finance", 2/4.

Du W., Green L., Myerson J. [2002], *Cross-cultural comparisons of discounting delayed and probabilistic rewards*, „Psychological Record", 52.

Kirby K.N., Santiesteban M. [2003], *Concave utility, transaction costs and risk in measuring discounting of delayed rewards*, „Journal of Experimental Psychology; Learning, Memory and Cognition", 29.

Loewenstein G. [1988], *The weighting of waiting. Response mode effect of intertemporal choice*, Working Paper, Center for Decision Research, University of Chicago, Chicago.

Markowitz H. [1952], *Portfolio Selection*, „The Journal of Finance", Vol. 7, No. 1.

Mises L. von [1962], *The Ultimate Foundation of Economic Science. An Essay on Method*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton.

Peccati L. [1972], *Su di una caratterizzazione del principio del criterio dell'attualizzazione*, Studium Parmense, Parma.

Piasecki K. [2005], *Od arytmetyki handlowej do inżynierii finansowej,* Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań.

Piasecki K. [2012], *Basis of Financial Arithmetic from the Point View of the Utility Theory*, „Philosophy & Methodology of Economics eJournal", No. 33.

Shelley M.K. [1993], *Outcome signs, question frames and discount rates*, „Management Sciences", 39.

Smaga E. [1999], *Arytmetyka finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Kraków.

Svensson L. [1994], *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992–1994*, National Bureau of Economic Research, Cambridge.

Thaler R.H. [1981], *Some empirical evidence on dynamic inconsistency*, „Economic Letters", 8.

BEHAVIOURAL ASPECTS OF FINANCIAL ARITHMETICS

Summary

There are presented two case studies: the influence of behavioural finance on financial arithmetic and the influence of mathematical prescriptive models on behavioural finance. The combination of these two examples demonstrates that financial mathematics and behavioural finance are each other complementary ways of exploring the real world of real finance.

Keywords: financial arithmetics, behavioural aspects

Translated by Krzysztof Piasecki