ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU SZCZECIŃSKIEGO

NR 768 FINANSE, RYNKI FINANSOWE, UBEZPIECZENIA NR 63 2013

KAROLINA KOZIOROWSKA
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

WARTOŚĆ ZAGROŻONA I WARUNKOWA WARTOŚĆ ZAGROŻONA – ZASTOSOWANIE TEORII WARTOŚCI EKSTREMALNYCH

Streszczenie

Zdarzenia ekstremalne zachodzą w wielu obszarach związanych z zarządzaniem ryzykiem. Czy rozpatrujemy ryzyko kredytowe, ubezpieczeniowe, operacyjne lub rynkowe, jednym z najistotniejszych zadań menedżerów staje się wykorzystanie metod zarządzania ryzykiem, które pozwalają modelować rzadkie, ale groźne wydarzenia. Wyniki przeprowadzonego badania pokazują, że wartości VaR są wyższe niż dla klasycznych metod estymacji. Zastosowanie zróżnicowanych metod szacowania VaR jest korzystniejsze dla banków oraz instytucji finansowych zarówno w Europie, jak i na świecie. Wydaje się, że teoria wartości ekstremalnych może okazać się skuteczniejszym narzędziem do szacowania ryzyka.

Słowa kluczowe: wartość zagrożona, warunkowa wartość zagrożona, teoria wartości ekstremalnych

Wprowadzenie

Ekstremalne zdarzenia występują w każdym obszarze związanym z zarządzaniem ryzykiem. Bez względu na to, czy mamy do czynienia z ryzykiem kredytowym, ubezpieczeniowym, operacyjnym lub rynkowym, jednym z największych wyzwań dla menedżerów staje się wdrożenie metod zarządzania ryzykiem, które pozwalają modelować rzadkie, ale groźne wydarzenia. W związku z tym ważne wydają się również konsekwencje występowania tych zdarzeń.

Modelowanie zjawisk ekstremalnych może mieć wszelkie zastosowania. W przypadku ryzyka kredytowego lub operacyjnego celem tym może być określenie wielkości kapitału na pokrycie nieregularnych strat kredytowych i nieuregulowanych płatności lub nieprzewidzianych problemów operacyjnych. W przypadku ryzyka rynkowego, na którym skupia się artykuł, może to być zainteresowanie, czy wielkość dziennej wartości zagrożonej (VaR) jest odpowiednia dla strat ponoszonych w księgach handlowych z powodu pojawiających się niekorzystnych ruchów rynkowych.

W niniejszym artykule ryzyko będzie rozpatrzone jako zmienne losowe, które odwzorowują nieprzewidywalne przyszłe stany w wartości reprezentujące zyski i straty. Ryzyko może być rozpatrywane indywidualne albo jako część procesu stochastycznego, w którym obecne ryzyko jest zależne od ryzyka występującego w przeszłości. W zawiązku z tym wartości reprezentujące zyski lub straty mają funkcję gęstości dostarczającą częściowych informacji o rozkładzie.

Ekstremalne wydarzenie pojawiają się wtedy, jeżeli ryzyko przyjmuje wartości z ogona rozkładu [McNeil 1999]. Zatem metody analizy wartości ekstremalnych służą do oszacowania prawdopodobieństwa pojawienia się i określenia konsekwencji wystąpienia rzadkich oraz ekstremalnych strat, co do których brakuje danych ze względu na wielkość ich wystąpienia [Trzpiot 2010].

Głównym celem niniejszego artykułu jest zastosowanie teorii wartości ekstremalnych do zarządzania ryzykiem finansowym. Wyliczono wartość zagrożoną i warunkową wartość zagrożoną przy użyciu uogólnionego rozkładu Pareto. Wyniki te porównano z wynikami obliczania VaR, korzystając z klasycznego podejścia.

Niedoszacowanie i przeszacowanie wartości zagrożonej jest bardzo niekorzystne. Jeżeli niedoszacujemy tę miarę, to możemy narazić się na utratę płynności. Z drugiej strony przeszacowanie uniemożliwia nam wykorzystanie w optymalny sposób całkowitych środków przeznaczonych na inwestycje.

Wyniki przeprowadzonego badania pokazują, że wartości VaR są wyższe w większości przypadków niż te wyznaczone z klasycznych metod estymacji. Wykorzystanie różnych metod szacowania VaR jest niezbędne dla banków oraz instytucji finansowych w Europie oraz na świecie. Wydaje się, że teoria wartości ekstremalnych może okazać się skuteczniejszym narzędziem do szacowania ryzyka.

1. Teoria wartości ekstremalnych

Istnieją dwa typy metod służących do modelowania wartości ekstremalnych. Pierwsze, klasyczne podejście, jest oparte na modelu bloków maksymalnych (*block maxima*). To model odpowiedni dla dużej liczby obserwacji wybranych z dużej próby. Obserwacje pochodzą z niepokrywających się, równych bloków [McNeil 1999].

Druga metoda, czyli model przekroczeń (*Peak over Threshold Model, POT*), pozwala na estymację ogona rozkładu zwrotów przekraczających zadany próg. Model POT ma większe zastosowanie w praktyce, gdyż jest bardziej efektywny do często nielicznych danych wartości ekstremalnych [McNeil 1999]. Niniejsza praca skupia się na modelu POT.

Pośród klasy modeli POT możemy wyróżnić dwa rodzaje analizy. Pierwszy typ semiparametrycznych metod wykorzystuje m.in. estymator Hilla. Drugi typ metod opiera się na uogólnionym rozkładzie Pareto, GPD (*Generalized Pareto Distribution*).

Załóżmy, że mamy n obserwacji zysków lub strat zmiennej losowej X niezależnej i identycznie rozłożonej (*iid*). Twierdzenie Fishera–Tippetta (1982) mówi o tym, że wraz ze wzrostem n rozkład wartości ekstremalnych zmiennej losowej X, rozumianych jako maksymalny zbiór obserwacji, jest zbieżny z uogólnionym rozkładem wartości ekstremalnych (GEV, *Generalised Extreme Value*), określonego wzorem [Dowd 2002]:

$$H_{\xi,\mu,\sigma} = \begin{cases} e^{-\left(1+\frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} & dla \quad \xi \neq 0 \\ e^{-e^{\frac{-(x-\mu)}{\sigma}}} & dla \quad \xi = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

gdzie $1+\dfrac{\xi(x-\mu)}{\sigma} > 0.$

Rozkład ten ma trzy parametry, gdzie μ jest parametrem położenia, σ jest parametrem skali, który mierzy rozproszenie. Parametr ξ jest indeksem ogona, ukazującym kształt (grubość) ogona.

Ze względu na wartość parametru ξ wyróżniamy trzy rozkłady [Dowd 2002]:

1. Jeżeli $\xi > 0$, to rozkład jest rozkładem Frecheta. Mówimy wtedy, że funkcja $F(x)$ ma grube ogony. Przypadek ten jest bardzo przydatny do finansowych stóp zwrotu, gdyż typowy ich rozkład ma grube ogony.
2. Jeżeli $\xi = 0$, to wtedy mamy rozkład Gumbela, co odpowiada sytuacji, że $F(x)$ ma normalną kurtozę.
3. Jeżeli $\xi < 0$, wtedy rozkład jest rozkładem Weibulla. Ma ogony cieńsze niż rozkład normalny, jednakże rozkład ten nie ma praktycznego zastosowania dla modelowania finansowych stóp zwrotu.

W celu uzyskania kwantyli odpowiedniej funkcji rozkładu wartości ekstremalnych, logarytmujemy wzór (1). Wtedy [Dowd 2002]:

$$\log(cl) = \begin{cases} -\left(1 + \dfrac{\xi(x^{*} - \mu)}{\sigma}\right)^{-1/\xi} & dla \quad \xi \neq 0 \\ -\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^{*}-\mu}{\sigma}\right)} & dla \quad \xi = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Wtedy wyznaczenie wartości zagrożonej (VaR) powiązanej z wybranym poziomem ufności otrzymujemy ze wzorów [Dowd 2002]:

$$VaR = \mu - \frac{\sigma}{\xi}\left[1 - (-\log(cl))^{-\xi}\right] \text{ dla rozkładu Frecheta, gdzie } \xi > 0. \tag{3}$$

$$VaR = \mu - \sigma \ \log[\log(\frac{1}{cl})] \text{ dla rozkładu Gumbela, gdzie } \xi = 0. \tag{4}$$

Drugim standardowym podejściem wykorzystywanym w teorii wartości ekstremalnych jest model przekroczeń (*Peak over Threshold Model*, *POT*).

Załóżmy, że isnieje zmienna losowa X oraz wartość progowa u, wtedy rozkład przekroczeń powyżej wartości progowej u zdefiniujemy jako [McNeil, Frey, Embrechts 2005]:

$$F_u\left(x\right) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F\left(x + u\right) - F(u)}{1 - F(u)}, \tag{5}$$

gdzie F jest nieznaną dystrybuantą zmiennej losowej X .

W przypadku jeżeli u jest wystarczająco dużą wartością, wtedy według twierdzenia Gnedenko–Pickandsa–Balkema–de Haana (1974) dystrybuanta warunkowa $F_u(y)$ ma rozkład graniczny, który jest uogólnionym rozkładem Pareto GPD (*Generalized Pareto Distribution*) z dystrybuantą postaci [Dowd 2002]:

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1-\left(1+\dfrac{\xi\, x}{\beta}\right)^{-1/\xi} & dla\ \ \xi \neq 0 \\ 1-e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)} & dla\ \ \xi = 0 \end{cases}, \tag{6}$$

gdzie $\beta > 0$ oraz $x \geq 0$.

Rozkład ten ma dwa parametry: β, czyli parametr skali, oraz ξ tzw. parametr kształtu, który odpowiada za grubość ogona rozkładu. W celu oszacowania dystrybuanty rozkładu Pareto musimy wybrać rozsądną wielkość wartości progowej u, która zależna jest od liczby obserwacji n oraz wartości N_u, czyli liczby przekroczeń progu u. Wybór wartości u ma wpływ na otrzymane wartości estymatorów.

Wtedy dystrybuanta jest następującej postaci [Dowd 2002]:

$$F(x) = \left(1-F(u)\right)G_{\xi,\beta}(x-u)+F(u) \tag{7}$$

gdzie $x > u$.

Jeszcze musimy oszacować wartość $F(u)$, która jest ilorazem liczby wartości nieprzekraczających progu u, do liczby wszystkich obserwacji, czyli $F(u) = \dfrac{n-N_u}{n}$. Wtedy równanie (7) przyjmuje postać [Dowd 2002]:

$$F(x) = 1-\frac{N_u}{n}\left[1+\xi\frac{x-u}{\beta}\right]^{-1/\xi}. \tag{8}$$

Ponadto równanie (8) może być wykorzystywane do wyznaczenia wartości zagrożonej, wówczas [Dowd 2002]:

$$VaR = u + \frac{\beta}{\xi}\left[\left(\frac{n}{N_u}(1-\alpha)\right)^{-\xi} - 1\right], \tag{9}$$

gdzie α jest współczynnikiem ufności (bliskim 1) dla VaR.

Stosując uogólniony rozkład Pareto, możemy również wyznaczyć wartość *expected shortfall* (warunkową wartość zagrożoną). Wówczas:

$$CVaR = \frac{VaR_\alpha}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi}. \tag{10}$$

Bardzo ważnym etapem estymacji dystrybuanty rozkładu Pareto jest wybór progu u. Jeżeli wybierzemy zbyt dużą wartość progu, może to spowodować zmniejszenie liczby obserwacji potrzebnych do wyznaczenia wartości estymatorów, w konsekwencji zwiększa to wariancję. Wybranie zbyt niskiego progu skutkuje obciążeniem estymatora, gdyż do opisu ogona rozkładu użyto by zbyt dużo centralnych obserwacji [Trzpiot 2010].

Najczęściej stosowaną metodą jest metoda graficzna, w której wykorzystuje się wykres funkcji wartości oczekiwanej przekroczenia (*Mean Excess*). Funkcja gęstości przekroczenia F_u opisuje rozkład strat przekroczeń ponad próg u, pod warunkiem, że u jest osiągalne. Funkcja wartości oczekiwanej przekroczeń opisuje wartość oczekiwaną F_u i dana jest wzorem [McNeil, Frey, Embrechts 2005]:

$$e(u) = E(X - u \mid X > u). \tag{11}$$

Jeżeli dla zmiennej losowej X wraz z funkcją gęstości $F = G_{\xi,\,\beta}$, wtedy z (5), funkcję gęstości przekroczeń można obliczyć ze wzoru:

$$F_u(x) = G_{\xi,\,\beta(u)}(x), \tag{12}$$

gdzie $\beta(u) = \beta + \xi u$.

Wtedy funkcja wartości oczekiwanej przekroczenia dana jest równaniem:

$$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}. \tag{13}$$

Funkcja $e(u)$ powinna być funkcją liniową, co stanowi kryterium wyboru u [Trzpiot 2010].

Czasami wybiera się jako próg wartość 5% lub 10% w zależności od liczebności próby. W niniejszym artykule zastosowano tę metodę wyboru progu.

2. Dane

Celem niniejszego artykułu jest wyliczenie wartości zagrożonej i warunkowej wartości zagrożonej przy użyciu uogólnionego rozkładu Pareto. Wyniki te porównano z wynikami obliczania VaR, korzystając z klasycznego podejścia (wyznaczenie odpowiedniego kwantyla). Analizie poddano szeregi r_t dziennych logarytmicznych stóp zwrotu dziesięciu dużych spółek z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie, które mają znaczący udział w składzie indeksu WIG20 na dzień 31 lipca 2012 roku. Zatem rozpatrywano stopy następujących spółek: Asseco Poland, Bank Pekao, Globe Trade Centre (GTC), Grupa LOTOS, KGHM Polska Miedź, PKO Bank Polski, Polski Górnictwo Naftowe i Gazownictwo (PGNiG), PKN Orlen, Synthos oraz Telekomunikacja Polska (TP SA). Stopy zwrotu obliczono na podstawie wzoru:

$$r_t = 100(\ln P_t - \ln P_{t-1}), \tag{14}$$

gdzie P_t jest ceną zamknięcia dla danej spółki.

Notowania spółek pochodzą z okresu 2 stycznia 2007 – 31 lipca 2012 roku, co daje 1402 stóp zwrotu. Powodem wyboru takiego okresu badania była chęć uwzględnienia różnych trendów giełdowych, zarówno wzrostowego, jak i spadkowego, oraz większej liczby obserwacji umożliwiających estymację parametrów rozkładu Pareto.

W tabeli 1 umieszczono statystyki opisowe rozważanych logarytmicznych stóp zwrotu z akcji spółek. W tabeli 1 widać, że zwroty czterech spółek – GTC, Grupa LOTOS, PGNiG oraz TP SA – charakteryzują się prawostronną skośnością, a pozostałe badane spółki lewostronną skośnością. Kurtoza dla danych stóp zwrotu jest większa od 3, zatem badane rozkłady nie są rozkładami normalnymi. Szczególną uwagę należy zwrócić na spółkę Asseco Poland, której kurtoza ma największą wartość. Średnia wartość stóp zwrotu dla trzech spółek – KGHM Polska Miedź, PGNiG, Synthos – przyjmuje dodatnią wartość, dla dwóch spółek – Asseco Poland oraz TP SA – wynosi zero, a dla pozostałych jest ujemna. Ponadto zarówno najmniejszą minimalną, jak i największą dodatnią stopę zwrotu osiągnęła spółka KGHM.

Tabela 1

Statystyki opisowe rozważanych stóp zwrotu

Statystyka	Minimum	Maksimum	Średnia	Odchylenie standardowe	Skośność	Kurtoza
Asseco Poland	-19,51	9,26	0,00	2,2060	-0,4106	**9,1623**
Bank Pekao	-20,59	13,56	-0,02	2,7206	-0,1795	7,0778
GTC	-18,42	17,28	-0,13	3,0964	**0,0286**	6,1273
Grupa LOTOS	-10,54	17,08	-0,04	2,5016	**0,2292**	6,3838
KGHM	**-23,62**	**17,69**	**0,08**	3,1187	-0,3754	7,8761
PKO BP	-12,22	9,97	-0,01	2,4120	-0,0574	4,8975
PGNiG	-8,05	8,80	**0,02**	2,0348	**0,1032**	4,5575
PKN ORLEN	-12,16	12,87	-0,02	2,4744	-0,1101	4,9357
Synthos	-20,50	14,66	**0,11**	2,9513	-0,0848	6,6323
TP SA	-8,64	9,63	0,00	1,8579	**0,0282**	4,7476

Źródło: obliczenia własne.

Pierwszym etapem badania było wyestymowanie parametrów uogólnionego rozkładu Pareto z wykorzystaniem metody największej wiarygodności. Załóżmy, że dla wystarczająco dużego progu u mamy $F_u(x) = G_{\xi,\beta}(x)$ dla $0 \le x \le x_F - u$ i $\xi \in \mathbb{R}$ oraz $\beta > 0$. Mamy dane zmienne $X_1, \ldots, X_n$ oraz losową liczbę N_u osiągającą próg u. Oznaczymy dla uproszczenia dane zmienne losowe jako $X_1, \ldots, X_{N_u}$. Dla każdej z tych zmiennych, przekraczającej próg, obliczamy resztę $Y_j = X_j - u$ dla funkcji przekraczającej stratę. Chcemy wyestymować parametry rozkładu GPD w taki sposób, aby dopasować ten rozkład dla N_u funkcji przekraczającej stratę [McNeil, Frey, Embrechts 2005].

Oznaczmy $g_{\xi,\,\beta}$ funkcję gęstości rozkładu GPD, wtedy [McNeil, Frey, Embrechts, 2005]:

$$\ln L(\xi,\beta,Y_{1,}\ldots,Y_{N_u}) = \sum_{j=1}^{N_u} \ln g_{\xi,\,\beta}(Y_j) = \\ = -N_u \ln\beta - \left(1+\frac{1}{\xi}\right)\sum_{j=1}^{N_u} \ln\left(1+\xi\frac{Y_j}{\beta}\right), \tag{15}$$

maksymalizujemy pod warunkiem, że $\beta > 0$ oraz $1+\xi\dfrac{Y_j}{\beta} > 0$ dla każdego j.

Wyniki przeprowadzonych estymacji znajdują się w tabeli 2 (próg 10%) oraz tabeli 3 (próg 5%). W efekcie zastosowania metod progowych otrzymano ocenę parametrów uogólnionej dystrybuanty Pareto.

W tabeli 2 widać, że wartości parametru kształtu dla lewego ogona są dodatnie, a w przypadku prawego ogona – tylko dla spółki TP SA. Ponadto można zaobserwować, że lewe ogony każdej z rozważanych spółek są cięższe od prawych, co oznacza, że wysokie ujemne stopy zwrotu są bardziej prawdopodobne aniżeli dodatnie. Najcięższymi lewymi ogonami charakteryzują się spółki: Grupa LOTOS, PGNiG oraz TP SA, co może przekładać się na wyższy poziom ryzyka związanego z tymi spółkami. Stopy zwrotu dla spółki TP SA mają najcięższy prawy ogon.

Tabela 2

Parametry uogólnionego rozkładu Pareto dla lewych i prawych ogonów rozkładu dla progu u = 10%

$u = 10\%$	Lewy ogon		Prawy ogon	
	β	ξ	β	ξ
Asseco Poland	0,478523	0,06	3,099946	-1,06101
Bank Pekao	0,479885	0,06	4,193832	-1,00845
GTC	0,479448	0,06	2,986569	-0,25833
Grupa LOTOS	0,437398	**0,11**	2,717973	-0,31659
KGHM	0,484365	0,06	3,138152	-0,32111
PKO BP	0,471327	0,06	2,859789	-0,77968
PGNiG	0,420644	**0,11**	1,762734	-0,31119
PKN ORLEN	0,472195	0,06	2,686394	-0,55949
Synthos	0,479927	0,06	4,002621	-0,68645
TP SA	0,418396	**0,11**	0,922973	**0,106581**

Źródło: obliczenia własne.

W tabeli 3, czyli dla wartości progu $u = 5\%$, uzyskano prawie podobne wyniki. Wartości parametru kształtu dla lewego ogona są dodatnie, a w przypadku prawego ogona – dla spółki Grupa LOTOS oraz TP SA. Można zauważyć, że lewe ogony są cięższe od prawych. Najcięższymi lewymi ogonami, tak jak poprzednio, charakteryzują się spółki: Grupa LOTOS, PGNiG oraz TP SA.

Tabela 3

Parametry uogólnionego rozkładu Pareto dla lewych i prawych ogonów rozkładu dla progu u = 5%

u = 5%	Lewy ogon		Prawy ogon	
	β	ξ	β	ξ
Asseco Poland	0,482151	0,06	2,017183	-0,56447
Bank Pekao	0,482859	0,06	4,157083	-1,02532
GTC	0,481551	0,06	1,820937	-0,32819
Grupa LOTOS	0,437631	**0,11**	1,130435	**0,246209**
KGHM	0,486054	0,06	1,765033	-0,2087
PKO BP	0,472419	0,06	2,563109	-0,64684
PGNiG	0,410367	**0,11**	1,749767	-0,33067
PKN ORLEN	0,473626	0,06	2,117693	-0,41447
Synthos	0,480933	0,06	3,770509	-0,58733
TP SA	0,413292	**0,11**	1,029499	**0,062957**

Źródło: obliczenia własne.

Następnym etapem badania było wyznaczenie wartości zagrożonej (VaR) oraz warunkowej wartości zagrożonej (CVaR) z wykorzystaniem teorii wartości ekstremalnych. W tym celu wykorzystano wzory (9) oraz (10). Ponadto wyznaczono wartość zagrożoną jako odpowiadający kwantyl rozkładu stóp zwrotu (podejście klasyczne). Obliczenia wykonano dla $\alpha = 0,01$ (tabela 4) oraz dla $\alpha = 0,95$ (tabela 5).

W tabeli 4 widać, że w przypadku pięciu spółek – GTC, Grupa LOTOS, PKN Orlen, Synthos oraz TP SA – wartości VaR są większe, jeżeli wykorzystano teorię wartości ekstremalnych, a nie stosowano podejścia klasycznego. Niedoszacowanie wartości zagrożonej może powodować brak płynności, natomiast przeszacowanie uniemożliwia wykorzystanie całkowitych środków na inwestycję. Ponadto można zauważyć, że dla spółek GTC, Grupa LOTOS oraz KGHM wartość zagrożona przyjmuje większe wartości dla progu $u = 10\%$ niż dla niższego progu. Dla pozostałych spółek mamy do czynienie z odwrotną sytuacją.

Tabela 4

Oszacowanie VaR i CVaR dla poziomu $1-\alpha = 0,99$ z wykorzystaniem teorii wartości ekstremalnych i podejściem klasycznym

$\alpha = 0.01$	GPD				VaR – podejście klasyczne
	10%		5%		
	VaR	CVaR	VaR	CVaR	
Asseco Poland	5,16	5,29	5,78	6,30	5,92
Bank Pekao	6,72	6,92	**7,58**	7,98	7,07
GTC	**8,78**	10,09	7,45	8,25	**7,61**
Grupa LOTOS	**7,27**	8,27	**6,26**	8,48	**6,20**
KGHM	7,25	8,22	7,21	8,25	7,45
PKO BP	5,90	6,16	6,53	7,08	6,58
PGNiG	5,34	5,99	**5,56**	6,33	5,55
PKN ORLEN	**6,48**	6,95	**6,54**	7,30	**6,30**
Synthos	**8,14**	8,63	**8,95**	9,88	**7,89**
TP SA	**4,74**	6,06	**4,77**	5,99	**4,66**

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 5

Oszacowanie VaR i CVaR dla poziomu $1-\alpha = 0,05$ z wykorzystaniem teorii wartości ekstremalnych i podejściem klasycznym

$\alpha = 0.95$	GPD				VaR – podejście klasyczne
	10%		5%		
	VaR	CVaR	VaR	CVaR	
Asseco Poland	**-3,46**	-3,01	-4,33	-3,90	**-3,25**
Bank Pekao	**-4,14**	-3,69	-5,17	-4,83	**-4,12**
GTC	-4,85	-4,40	-6,31	-5,88	-4,92
Grupa LOTOS	-3,91	-3,53	-5,14	-4,78	-3,98
KGHM	-4,49	-4,04	-6,11	-5,67	-4,65
PKO BP	**-3,64**	-3,27	-4,90	-4,47	-3,59
PGNiG	-3,19	-2,82	-4,42	-4,08	-3,37
PKN ORLEN	**-3,89**	-3,45	-5,23	-4,80	**-3,87**
Synthos	-4,22	-3,77	-6,06	-5,62	-4,74
TP SA	-2,94	-2,58	-4,07	-3,73	-3,02

Źródło: obliczenia własne.

W tabeli 5 widać, że w przypadku czterech spółek – Asseco Poland, Bank Pekao, PKO BP oraz PKN Orlen – wartości VaR są większe, jeżeli wykorzystano teorię wartości ekstremalnych, a nie stosowano podejścia klasycznego. Ponadto można zauważyć, że dla wszystkich rozpatrywanych spółek wartość zagrożona przyjmuje większe wartości dla progu $u = 5\%$ niż dla wyższego progu.

W celu rozstrzygnięcia jakości oszacowań wartości zagrożonej przy użyciu rozkładu GPD dla odpowiednich progów wyznaczono przeciętną odległość (RMSE) kwantyli teoretycznych od empirycznych wykorzystując wzór:

$$RMSE(\alpha) = \frac{1}{10}\sqrt{\sum_{i=1}^{10}\left(k_{teor}^{i}(\alpha) - k_{empi}^{i}(\alpha)\right)^{2}}, \tag{16}$$

gdzie $k_{teor}^{i}(\alpha)$ oraz $k_{empi}^{i}(\alpha)$ są α - kwantyl teoretyczny oraz empiryczny odpowiednio dla każdej i -tej spółki. Wyniki przedstawiono w tabeli 6.

Tabela 6

Przeciętna odległość (RMSE) dla kwantyli teoretycznych i empirycznych

Próg	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,03$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,90$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,97$	$\alpha = 0,99$
10%	0,1963	0,1645	0,1440	**0,0014**	**0,3042**	**0,0626**	0,2978	0,8928
5%	**0,1245**	**0,1135**	**0,0060**	0,3661	0,7207	0,3897	**0,1341**	**0,4841**

Źródło: obliczenia własne.

Jak można zauważyć, trudno wskazać dla $\alpha = 0,01$ i $\alpha = 0,95$ wielkość progu, przy którym oszacowanie wartości zagrożonej jest dokładniejsze. W związku z tym wyznaczono wartość zagrożoną dla innych poziomów α. Wyniki wyznaczonych wartości zagrożonych dla poszczególnych spółek przedstawiono w tabeli 7.

Analizując dane zawarte w tabeli 6, można zauważyć, że lepsze oszacowania otrzymujemy dla metody, w której przyjęto 5% próg. Najdokładniej jest oszacowana wartość zagrożona dla progu $u = 5\%$ oraz $\alpha = 0,05$. Najgorsze oszacowania VaR otrzymujemy dla $\alpha = 0,99$, co może być spowodowane zbyt ciężkimi ogonami, zatem trudniej dopasować parametry rozkładu do wartości empirycznych.

Tabela 7

Oszacowanie VaR dla różnych poziomów α z wykorzystaniem teorii wartości ekstremalnych i podejściem klasycznym

Poziom ufności	Próg	Asseco Poland	Bank Pekao	GTC	Grupa LOTOS	KGHM	PKO BP	PGNiG	PKN ORLEN	Synthos	TP SA
$\alpha = 0,99$	10%	-3,48	-4,16	-4,87	-3,93	-4,51	-3,66	-3,20	-3,91	-4,24	-2,96
	5%	-4,35	-5,18	-6,33	-5,15	-6,13	-4,91	-4,43	-5,25	-6,08	-4,08
	VaR	-5,61	-6,74	-7,89	-6,44	-8,83	-6,67	-5,32	-6,26	-7,64	-4,91
$\alpha = 0,97$	10%	-3,47	-4,15	-4,86	-3,92	-4,50	-3,65	-3,20	-3,90	-4,23	-2,95
	5%	-4,34	-5,18	-6,32	-5,15	-6,12	-4,90	-4,43	-5,24	-6,07	-4,08
	VaR	-3,96	-4,80	-5,70	-4,77	-5,75	-4,77	-4,04	-4,62	-5,72	-3,67
$\alpha = 0,90$	10%	-3,44	-4,12	-4,83	-3,89	-4,47	-3,63	-3,17	-3,87	-4,20	-2,93
	5%	-4,31	-5,15	-6,29	-5,12	-6,09	-4,87	-4,41	-5,21	-6,04	-4,05
	VaR	-2,41	-3,13	-3,82	-2,96	-3,44	-2,76	-2,32	-2,88	-3,14	-2,10
$\alpha = 0,10$	10%	2,49	2,96	3,60	2,83	3,58	2,84	2,44	3,00	3,50	2,33
	5%	1,93	0,12	3,75	3,30	3,48	1,72	2,01	2,35	1,80	2,33
	VaR	2,49	2,97	3,60	2,83	3,58	2,84	2,44	3,00	3,49	2,33
$\alpha = 0,05$	10%	4,01	5,06	5,49	4,52	4,90	4,37	3,54	4,54	5,71	2,99
	5%	3,63	4,30	5,17	4,02	4,80	3,97	3,38	4,05	5,02	3,03
	VaR	3,65	4,29	5,13	4,02	4,82	3,95	3,38	4,03	5,00	3,03
$\alpha = 0,03$	10%	4,60	5,89	6,69	5,55	5,75	5,07	4,21	5,35	6,79	3,51
	5%	4,54	5,95	6,02	4,63	5,65	5,08	4,20	5,02	6,69	3,56
	VaR	4,56	5,19	6,06	4,68	5,89	4,66	4,08	4,80	6,05	3,60

Źródło: obliczenia własne.

Zakończenie

Głównym celem niniejszego artykułu było zastosowanie teorii wartości ekstremalnych do zarządzania ryzykiem finansowym. Wyliczono wartość zagrożoną i warunkową wartość zagrożoną przy użyciu uogólnionego rozkładu Pareto. Wykorzystanie tej teorii wydaje się słuszne, gdyż pozwala skupić się na dokładnej estymacji jedynie ogona rozkładu, zamiast modelowania całego rozkładu. Wyniki porównano z wynikami obliczania VaR, korzystając z klasycznego podejścia (wyznaczenie odpowiedniego kwantyla).

Analizie poddano szeregi dziennych logarytmicznych stóp zwrotu dziesięciu dużych spółek z GPW w Warszawie. Wyniki przeprowadzonego badania pokazują, że wartości VaR są wyższe w większości przypadków niż te wyznaczone z klasycznych metod estymacji. Ponadto lepsze oszacowania VaR można otrzymać dla metody, w której przyjęto pięcioprocentowy próg. Najdokładniej oszacowany jest VaR dla progu $u = 5\%$ oraz $\alpha = 0,05$. Najgorsze oszacowania VaR otrzymujemy dla $\alpha = 0,99$, co może być spowodowane zbyt ciężkimi ogonami, w związku z tym trudniej dopasować parametry rozkładu do wartości empirycznych.

Wykorzystanie różnych metod szacowania VaR jest niezbędne dla banków oraz instytucji finansowych zarówno w Europie, jak i na świecie. Wydaje się, że teoria wartości ekstremalnych może okazać się skuteczniejszym narzędziem do szacowania ryzyka.

Literatura

Balkema A., de Haan L. [1974], *Residual Life Time at Great Age*, „Annals of Probability", Vol. 2.

Dowd K. [2002], *Measuring Market Risk*, John Wiley & Sons, England.

Fisher R.A., Tippett H.C. [1928], *Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest and Smallest Member of a Sample*, „Proceedings of the Cambridge Philosophical Society", Vol. 24.

McNeil A.J. [1999], *Extreme Value Theory for risk managers*, Mimeo ETZH Zentrum, Zurich.

McNeil A.J., Frey R., Embrechts P. [2005], *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, New Jersey.

Trzpiot G. [2010], *Wielowymiarowe metody statystyczne w analizie ryzyka inwestycyjnego*, PWE, Warszawa.

VALUE AT RISK, CONDITIONAL VALUE AT RISK – AN APPLICATION OF EXTREME VALUE THEORY

Summary

Extreme event risk is present in all areas of risk management. Whether we are concerned with market, credit, operational or insurance risk, one of the challenges to the risk manager is to implement risk management models which allow for rare but dangerous events, and permit the measurement of their consequences. The article presents estimation results of Generalized Pareto Distribution and its application to Value at Risk. We study the daily return distributions for ten stocks of Warsaw Stock Exchange. In this paper we show that estimation of Value at Risk is better for 5% threshold.

Keywords: Value at Risk, Conditional Value at Risk, extreme value theory

Translated by Karolina Koziorowska