

IWONA KONARZEWSKA

Uniwersytet Łódzki

**WYKORZYSTANIE SYMULACJI STOCHASTYCZNEJ
DO BADANIA WRAŻLIWOŚCI SKŁADU
OPTYMALNYCH PORTFELI AKCJI**

Streszczenie

W pracy pokazano wykorzystanie symulacji stochastycznej do badania wrażliwości optymalnych wag modeli portfelowych w przypadku inwestycji w akcje. Z elementami procesu podejmowania decyzji inwestycyjnych wiąże się niepewność. Dotyczy ona:

- założeń o łącznym rozkładzie prawdopodobieństwa stóp zwrotu;
- jakości szacunków oczekiwanych stóp zwrotu, wariancji i kowariancji;
- wyboru kryteriów i ograniczeń modelu optymalizacyjnego.

Przedmiotem analizy są optymalne portfele akcji spółek będących komponentami indeksu mWIG40. Pokazano wyniki analiz statystycznych dla tygodniowych stóp zwrotu w latach 2009–2011 oraz wyniki badania symulacyjnego przeprowadzonego w celu zbadania wrażliwości struktury portfeli utworzonych według modeli: Markowitza, minimalizacji warunkowej straty CVaR, Telsera, a także proponowanego modelu minimalizującego udział pierwszej głównej składowej macierzy korelacji stóp zwrotu w wariancji portfela. W badaniu symulacyjnym wykorzystano metodę pozwalającą na zachowanie struktury i siły współzależności między stopami zwrotu ze składowych portfeli bazującą na rozkładzie macierzy korelacji według wartości własnych. Przeprowadzone badanie symulacyjne pozwala ocenić wybrane modele portfelowe pod względem wrażliwości uzyskiwanych rozwiązań – składów portfeli oraz daje rekomendację dla inwestorów dla wyboru konkretnego modelu.

Słowa kluczowe: symulacje stochastyczne, wrażliwość, analiza portfelowa

Wprowadzenie

Celowość dywersyfikacji portfeli inwestycyjnych jest niekwestionowanym wnioskiem wypływającym z prac wielu wybitnych ekonomistów, począwszy od Markowitza [1952], Sharpe'a [1964], Lintnera [1965]. Jest to wynik normatywny teorii rynku efektywnego oraz modelu CAPM (Capital Asset Pricing Model). Optymalny skład portfela może być ustalony przy przyjęciu kryterium optymalizacji, jak np. minimalizacja wariancji stopy zwrotu z portfela (model MV – *mean-variance*), oraz ograniczeń wynikających z minimalnych wymagań inwestora odnośnie do stopy zwrotu z inwestycji i nieujemności wag. Rozwiązania optymalne modeli portfelowych uzyskuje się przy przyjęciu parametrów charakteryzujących oczekiwane stopy zwrotu oraz elementy macierzy kowariancji. Oceny tych parametrów są obarczone niepewnością wynikającą m.in. z doboru okna czasowego dla próby statystycznej, a także możliwą niestacjonarnością procesów stochastycznych generujących stopy zwrotu.

Problem podnoszony w niniejszej pracy to wrażliwość wartości optymalnych wag. Zwracają na niego uwagę, w przypadku modeli typu MV, np. Best, Grauer [1991a; 1991b], Chopra, Ziemba [1993]. Konkretnie z ich prac wynika, że rozwiązania bardzo silnie reagują na błędy szacunku lub prognoz parametrów; dotyczy to zwłaszcza ocen oczekiwanych stóp zwrotu. Większą wrażliwość zaobserwowano, gdy w modelu wymaga się nieujemności wag. Gdy inwestor nie dysponuje precyzyjnymi prognozami (a najczęściej tak właśnie jest w praktyce), proponuje się przyjęcie równych stóp zwrotu dla wszystkich składowych¹. Wskazuje się również na mniejszą wrażliwość rozwiązań na błędy ocen elementów macierzy kowariancji.

W pracy poddano analizie segment akcji średnich spółek na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Zwraca uwagę obecność silnych związków o charakterze liniowym między szeregami empirycznych stóp zwrotu z akcji². Przeprowadzono badanie symulacyjne, którego celem była weryfikacja wrażliwości optymalnych rozwiązań wybranych modeli portfelowych w warunkach, gdy stopy zwrotu są generowane z wielowymiarowego rozkładu normalnego o zadanym wektorze wartości oczekiwanych oraz macierzy kowariancji – odpowiadających

¹ Najczęściej przyjmowaną wartością dla oczekiwanych stóp zwrotu z akcji jest zero.

² Siłę zależności o charakterze liniowym proponuje się mierzyć za pomocą indeksu uwarunkowania – ilorazu największej do najmniejszej wartości własnej macierzy korelacji stóp zwrotu z akcji z próby.

szacunkom na podstawie próby historycznej. W tak sformułowanych warunkach wrażliwość wag modelu może być interpretowana jako wynik związany z losową próbą. Dla pomiaru wrażliwości wykorzystano odległość kątową wektorów wag.

Rozważono portfel inwestycyjny składający się z N akcji. Jego strukturę określają wagi X_i , $i=1, \dots, N$; $\mathbf{x}^T = [X_1, \dots, X_N]$. Waga X_i stanowi udział kwoty zainwestowanej w akcje i -tej spółki w wartości początkowej całego portfela. Poniżej podano najważniejsze przyjęte oznaczenia i zależności.

Stopa zwrotu z portfela aktywów:

$$R_p = \sum_{i=1}^N X_i R_{it} = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_t, \quad (1)$$

gdzie:

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{i,t-k}}{P_{i,t-k}} = \frac{P_{it}}{P_{i,t-k}} - 1 \quad (2)$$

k – horyzont inwestowania; liczba tygodni jakie upłyną od zakupu do sprzedaży portfela,

P_{it} – cena i -tych aktywów w okresie t ,

\mathbf{R}_t – N -elementowy wektor stóp zwrotu z inwestycji dla składowych portfela w okresie t .

Wartość oczekiwana stopy zwrotu z portfela aktywów:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N X_i E(R_i) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}^*, \quad (3)$$

gdzie:

$E(R_i) = R_i^*$ jest wartością oczekiwaną stopy zwrotu z i -tych aktywów,

\mathbf{R}^* – N -elementowy wektor wartości oczekiwanych stóp zwrotu z inwestycji w N aktywów.

Wariancja portfela aktywów:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}, \quad (4)$$

gdzie: Σ – $N \times N$ macierz kowariancji stóp zwrotu z inwestycji w akcje składowe portfela

Wartość ryzykowana $VaR(\alpha)$ dla portfela aktywów:

Przy założonym poziomie ufności $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ określa się α – procentowy kwantyl $r^\alpha(R_p)$ rozkładu prawdopodobieństwa stopy zwrotu z inwestycji portfelowej:

$$r^\alpha(R_p) = \sup \left\{ r \mid P(R_p \leq r) \leq \alpha \right\}. \quad (5)$$

Wielkość VaR , wyrażona zwykle w kwocie pieniężnej, odpowiada temu kwantylowi. W niniejszej pracy $VaR(\alpha)$ utożsamiono z $r^\alpha(R_p)$. Wartość tego kwantyla dla małych wartości α jest ujemna – oznacza stratę.

Warunkowa wartość ryzykowana $CVaR^\alpha$ dla portfela aktywów:

$$CVaR^\alpha(R_p) = E \left\{ R_p \mid R_p \leq r^\alpha(R_p) \right\}. \quad (6)$$

Wartość $CVaR^\alpha$, zwykle ujemna, oznacza warunkową wartość oczekiwaną stopy zwrotu z portfela w przypadku realizacji strat o wartości bezwzględnej nie niższych niż wartość bezwzględna $VaR(\alpha)$.

1. Wybrane modele optymalizacji portfela akcji

W pracy poddano badaniu następujące modele służące konstrukcji portfeli akcji:

Model Markowitza:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma_p^2 \\ E(R_p) & \geq r \\ \sum_{i=1}^N X_i & = 1 \\ X_i & \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie $r \in (r_{\min}, r_{\max})$ jest określoną wartością satysfakcjonującej inwestora minimalnej stopy zwrotu.

Model minimalizacji warunkowej straty CVaR:

$$\begin{aligned} \min CVaR^\alpha(R_p) \\ \sum_{i=1}^N X_i = 1 \\ X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (8)$$

W przypadku tego modelu wykorzystano dwie techniki szacowania wartości $VaR(\alpha)$:

- z wykorzystaniem symulacji historycznej (model CVaR1) na podstawie próby historycznej bądź symulowanej;
- jako α -kwantyl rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowym oszacowanym na podstawie próby historycznej bądź wyników symulacji (model CVaR_N).

Model Telsera:

$$\begin{aligned} \max E(R_p) \\ P(R_p < r_\Delta) < \alpha \\ \sum_{i=1}^N X_i = 1 \\ X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie r_Δ oznacza stopę zwrotu z portfela uznaną przez inwestora za bezpieczną, a α to progowa wartość prawdopodobieństwa nieosiągnięcia bezpiecznego poziomu stopy zwrotu.

Model PC – minimalizacji pierwszej głównej składowej macierzy korelacji:

Koncepcja tego modelu wykorzystuje rozkład macierzy korelacji stóp zwrotu według wartości własnych:

$$\mathbf{P} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T, \quad (10)$$

gdzie \mathbf{P} jest macierzą korelacji stóp zwrotu, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ jest diagonalną macierzą jej wartości własnych, a \mathbf{V} macierzą związanych z nimi wektorów własnych.

W pracy Konarzewska [2012] pokazano, że wariancję portfela akcji można wyrazić jako:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \mathbf{x}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{x} = \\ &= \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\omega} = \\ &= \sum_{j=1}^N \lambda_j \omega_j^2 \end{aligned} \quad (11)$$

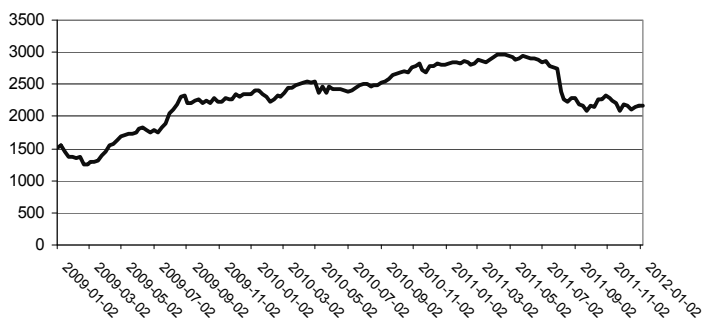
gdzie $\boldsymbol{\omega} = [\omega_j]$, $\omega_j = \sum_{l=1}^N X_l \sigma_l v_{lj}$, $j=1, \dots, N$; σ_l oznacza odchylenie standardowe stopy zwrotu z l -tej składowej a v_{lj} l -ty element j -tego wektora własnego. Proponowany jest model minimalizujący składową związaną z największą wartością własną. Model PC wydaje się interesujący w warunkach występowania silnych współzależnych stóp zwrotu z akcji na rynku.

$$\begin{aligned} \min \omega_1^2 \\ \sum_{i=1}^N X_i &= 1 \\ X_i &\geq 0, \quad i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (12)$$

2. Portfele akcji średnich spółek na GPW w Warszawie w latach 2009–2011

Punktem wyjścia dla przeprowadzonego badania symulacyjnego wrażliwości składów portfeli inwestycyjnych było przeprowadzenie analizy statystycznej rynku akcji średnich spółek notowanych na GPW w Warszawie w latach 2009–2011. Badano tygodniowe ceny akcji i stopy zwrotu. Badaniem objęto 37 spółek

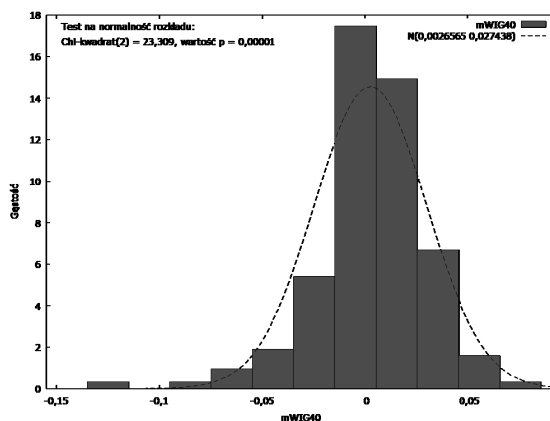
– uczestników indeksu mWIG40. Wykres wartości indeksu w okresie próby zaprezentowano na rysunku 1.



Rysunek 1. Wykres wartości indeksu mWIG40 w latach 2009–2011, dane tygodniowe

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych www.stooq.pl.

Oprócz analizy charakterystyk opisowych, jak średnie stopy zwrotu, odchylenia standardowe stóp zwrotu, macierz korelacji stóp zwrotu, przeprowadzono także badanie zgodności rozkładów stóp zwrotu z rozkładem normalnym. Testy statystyczne nie wykazały istotnych odstępstw od rozkładu normalnego. Histogram rozkładu tygodniowych stóp zwrotu z indeksu mWIG40 zbudowany na podstawie danych za lata 2009–2011 pokazano na rysunku 2.



Rysunek 2. Rozkład stóp zwrotu z indeksu mWIG40, dane tygodniowe z okresu 2009–2011.

Źródło: obliczenia własne za pomocą programu GRETL.

Stopień uwarunkowania macierzy korelacji 37 spółek wynosił 59,9, co świadczy o silnej współzależności stóp zwrotu. Dla spółek będących komponentami indeksu obliczono optymalne wagi w przypadku analizowanych modeli, przyjmując jako parametry oceny uzyskane na podstawie próby historycznej. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Optymalne udziały spółek w portfelu inwestycyjnym (%)

Spółka/ model	Markowitz	CVaR1	CVa- R_N	Telser	PC	Spółka/ model	Markowitz	CVaR1	CVa- R_N	Telser	PC
AGO	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	GNB	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
AST	0,00	0,00	0,00	16,48	0,00	GTN	0,00	0,00	0,25	0,00	0,00
ATT	0,00	7,00	13,70	0,00	0,00	HWE	0,00	0,00	3,76	0,00	0,00
BDX	5,52	10,13	5,11	0,00	0,00	IDM	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BIO	0,00	0,00	1,89	0,00	0,00	IPX	0,63	0,00	1,77	0,00	0,00
BSK	0,00	0,00	0,31	0,00	0,00	KPX	2,01	0,04	4,49	0,00	0,00
CAR	0,00	0,00	2,90	0,00	0,00	KRB	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
CCC	7,48	0,00	3,89	0,00	0,00	KTY	0,00	0,04	4,85	0,00	0,00
CCI	8,65	4,96	5,99	0,00	0,00	LPP	13,68	11,00	3,97	0,00	0,00
CDC	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	MDS	0,00	0,00	0,42	0,00	0,00
CDR	0,73	0,00	1,02	24,53	0,00	MIL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
CIE	0,00	0,00	0,76	0,00	0,00	NET	11,36	18,13	5,46	0,00	0,00
CPS	10,33	14,93	5,21	0,00	0,00	OIL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
CRM	0,52	9,46	4,82	58,99	0,00	ORB	0,00	0,00	2,15	0,00	0,00
EAT	2,01	0,00	3,28	0,00	0,00	PEP	9,18	12,51	4,52	0,00	0,00
ECH	0,00	0,00	2,09	0,00	0,00	PXM	1,09	0,00	2,29	0,00	0,00
EMP	10,52	2,37	4,86	0,00	100,00	RSE	0,00	0,00	0,05	0,00	0,00
ENA	12,28	9,41	5,07	0,00	0,00	ZAP	0,00	0,00	1,47	0,00	0,00
EUR	4,00%	0,00%	3,65%	0,00%	0,00%						

Źródło: obliczenia własne w MS Excel.

Wybrane charakterystyki statystyczne dla opracowanych portfeli zaprezentowano w tabeli 2.

Tabela 2

Wybrane mierniki statystyczne dla optymalnych portfeli akcji

Miernik/model portfela	Markowitz	CVaR1	CVaR_N	Telser	PC
1	2	3	4	5	6
Średnia stopa zwrotu z portfela (%)	0,42	0,56	0,60	1,72	0,64
Odchylenie standardowe (%)	2,10	2,42	2,58	6,40	4,28

	1	2	3	4	5	6
VaR(0,05) (%)		-2,43	-2,72	-3,65	-6,56	-4,70
CVaR(0,05) (%)		-4,93	-4,44	-5,56	-11,27	-7,08
Prawdopodobieństwo nieosiągnięcia poziomu bezpieczeństwa		0,433	0,459	0,420	0,395	0,497

Źródło: obliczenia własne.

Dla celów badania symulacyjnego wybrano 18 spółek, dla których udział w przynajmniej jednym portfelu w tabeli 1 był nie niższy niż 3%. Stopień uwarunkowania macierzy korelacji wynosił 11,17, co oznacza, że eliminacja spółek spowodowała likwidację znacznej części wzajemnych powiązań między stopami zwrotu.

3. Metoda symulacji współzależnych stóp zwrotu z akcji

Zastosowano następującą metodę generowania wartości stóp zwrotu z akcji w badaniu symulacyjnym, zakładając, że można przyjąć założenie o normalności stóp zwrotu ze składowych portfela:

- Wygenerowanie realizacji N -elementowego wektora losowego $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_N]^T$ o niezależnych składowych o standaryzowanym rozkładzie normalnym (w badaniu wygenerowano 1000 realizacji).
- Transformacja liniowa wektora $\boldsymbol{\eta}$ według wzoru:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= \eta_1 \sqrt{\lambda_1} \mathbf{v}_1 + \eta_2 \sqrt{\lambda_2} \mathbf{v}_2 + \dots + \eta_N \sqrt{\lambda_N} \mathbf{v}_N = \\ &= \mathbf{V} \sqrt{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_N})$$

W wyniku transformacji (13) otrzymano realizacje wektora losowego $\boldsymbol{\gamma}$, którego macierz kowariancji odpowiada przyjętej macierzy korelacji.

Przemnożono wygenerowane wartości przez odpowiednie odchylenia standardowe i dodano odpowiednie wartości średnie.

Wygenerowano 1000 realizacji wektorów losowych odpowiadających stopom zwrotu z 18 spółek. Metodę generowania zaproponowano w pracy Kona-rzewska [2012: 234].

4. Pomiar wrażliwości

W pracy Konarzewska [2008] zwrócono uwagę, że w przypadku silnych współzależności między szeregami stóp zwrotu zagadnienie minimalizacji wariancji portfela jest źle uwarunkowane, co oznacza niejednoznaczność rozwiązania optymalnego modelu Markowitza – wiele portfeli charakteryzuje się podobną wartością wariancji, mała zmiana parametrów modelu prowadzi do zasadniczo odmiennych rozwiązań. Przeprowadzone badanie symulacyjne m.in. miało na celu bliższe przyjrzenie się temu problemowi. Do pomiaru wrażliwości składów portfeli wykorzystano odległość kątową wektorów:

$$d_A = \sqrt{1 - \frac{\left(\sum_{j=1}^N x_{1j} \cdot x_{2j}\right)^2}{\sum_{j=1}^N x_{1j}^2 \cdot \sum_{j=1}^N x_{2j}^2}} \quad (14)$$

Jest to miernik oparty na funkcji sinus, równy jedności dla wektorów ortogonalnych.

5. Założenia przyjęte w badaniu symulacyjnym

Przeprowadzono analizę macierzy korelacji dla osiemnastu wybranych spółek według wartości własnych. Wynik: 4 wartości własne większe od jedności; stopień uwarunkowania 11,17. (posłużono się algorytmem SVD Golub, Reinsch 1971).

Powtórzono obliczenia optymalnych składów dla wybranych osiemnastu spółek; w modelu Markowitza dołączono warunek dla min poziomu stopy zwrotu (na poziomie mediany dla badanych spółek); w modelu Telsera dołączono warunek dla maksymalnej wartości odchylenia standardowego na poziomie 7%, poziom bezpieczeństwa przyjęto równy 0,1%, prawdopodobieństwo nieosiągnięcia poziomu bezpieczeństwa równe 0,45.

Wygenerowano 1000-elementowe szeregi odpowiadające stopom zwrotu z akcji każdej ze spółek; obliczono optymalne składy portfeli oraz wartości stóp zwrotu i mierników ryzyka dla portfeli,

Generowanie szeregów i obliczenia optymalnych składów portfeli powtórzono 100 razy.

6. Wyniki badania symulacyjnego

Wybrane wyniki badania symulacyjnego przedstawiono w tabelach 3a i 3b. Zamieszczono w nich:

- wyniki optymalizacji składów portfeli dla osiemnastu spółek uzyskane na podstawie danych historycznych,
- przeciętne wartości udziałów w portfelu oraz odchylenia standardowe uzyskane w symulacjach.

W tabeli 4 zawarto informacje o stopach zwrotu z portfeli, ryzyku szacowanym za pomocą odchylenia standardowego, a także oszacowane wartości miar VaR(0,05) oraz CVaR. W przypadku portfeli konstruowanych na podstawie danych historycznych do uzyskania oszacowań wykorzystano metodę symulacji historycznej. Dla portfeli będących wynikiem symulacji stochastycznej w tabeli 4 pokazano przeciętne wartości odchyżeń standardowych. W tabeli 4 pokazano również wartości realnej stopy zwrotu z portfela obliczone przy założeniu, że w portfel zainwestowano 6 stycznia 2012 i sprzedano go 24 lutego 2012 roku.

Tabela 3a

Udziały spółek w optymalnych portfelach akcji (%)

Model	Markowitz			CVaR1			CVaR_N		
Spółka	portfel dla danych historycznych	średnie udziały	odchylenie standardowe	portfel dla danych historycznych	średnie udziały	odchylenie standardowe	portfel dla danych historycznych	średnie udziały	odchylenie standardowe
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AST	0,2	0,7	1,47	0,0	1,2	2,11	0,0	0,6	1,29
ATT	1,0	0,5	1,21	2,3	1,6	2,95	0,6	1,1	2,04
BDX	7,1	5,9	4,18	21,4	5,8	5,36	12,2	6,1	5,56
CCC	6,5	5,4	3,82	0,9	5,2	4,84	2,8	4,7	3,59
CCI	9,1	9,5	3,87	1,6	10,3	5,59	7,9	8,0	3,43
CDR	1,8	1,9	1,37	0,0	2,2	2,28	1,6	1,7	1,58
CPS	6,6	8,5	4,57	9,0	8,2	5,87	9,5	8,6	2,67
CRM	3,1	2,0	2,30	7,7	2,5	2,10	5,3	2,1	2,05
EAT	0,5	1,1	1,59	0,0	1,8	2,81	0,0	1,0	1,66
EMP	14,3	13,1	4,53	8,8	12,8	5,32	10,2	12,2	2,80
ENA	11,5	10,7	3,71	9,3	10,4	5,35	9,6	10,0	2,71
EUR	5,9	5,1	2,67	0,0	6,0	4,86	3,0	4,8	3,20
HWE	0,0	0,1	0,40	0,1	0,5	1,12	0,0	0,7	1,33
KPX	2,6	3,3	2,57	0,0	3,0	3,36	0,1	2,6	2,43

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
KTY	0,0	0,5	1,35	0,1	2,0	3,49	3,1	1,0	1,24
LPP	13,0	12,6	4,03	16,8	10,5	5,61	9,0	16,2	3,94
NET	13,0	13,7	4,60	12,4	10,4	5,91	14,5	14,3	1,88
PEP	3,8	5,2	4,23	9,5	5,7	5,15	10,5	4,4	3,56

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3b

Udziały spółek w optymalnych portfelach akcji cd. (%)

Model Spółka	Telser			PC		
	portfel dla danych historycznych	średnie udziały	odchylenie standardowe	portfel dla danych historycznych	średnie udziały	odchylenie standardowe
AST	8,4	10,6	19,31	0,0	1,3	2,89
ATT	0,0	3,9	7,43	1,5	1,2	2,59
BDX	0,0	0,0	0,00	0,9	0,8	3,77
CCC	0,0	0,0	0,08	0,7	4,9	4,91
CCI	0,0	0,0	0,00	5,2	1,6	0,84
CDR	22,4	13,0	24,05	5,3	3,7	2,35
CPS	0,0	0,0	0,00	15,0	11,1	1,02
CRM	69,3	69,5	24,30	4,2	0,7	0,78
EAT	0,0	0,0	0,00	0,7	3,9	0,99
EMP	0,0	0,9	2,94	9,5	9,7	1,82
ENA	0,0	0,1	1,28	11,0	10,4	1,87
EUR	0,0	0,8	3,47	9,2	7,5	1,54
HWE	0,0	1,1	4,76	3,3	3,1	2,15
KPX	0,0	0,0	0,00	0,0	4,0	3,11
KTY	0,0	0,0	0,00	13,4	7,6	1,66
LPP	0,0	0,0	0,18	8,5	11,6	2,71
NET	0,0	0,0	0,00	3,3	7,2	3,49
PEP	0,0	0,0	0,00	8,2	9,8	1,43

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4

Charakterystyki statystyczne optymalnych portfeli akcji (%)

Model/ miernik	Średnia stopa zwrotu z portfela	Odchylenie standardowe	Var(0,05)	CVaR	Realna stopa zwrotu
1	2	3	4	5	6
Markowitz-hist	0,54	2,14	-2,62	-4,92	8,43
Markowitz-sym	0,55	2,09	-2,90	-3,75	9,20
CVaR1-hist	0,55	2,33	-2,79	-4,49	8,95

CVaR1-sym	0,58	2,18	-2,83	-3,41	9,73
CVaR_N-hist	0,52	2,19	-3,09	-4,99	9,33
CVaR_N-sym	0,52	2,17	-3,04	-3,80	9,80
Telser-hist	1,80	7,00	-7,26	-11,95	6,77
Telser-sym	1,95	6,98	-9,44	-12,30	7,38
PC-hist	0,54	2,29	-3,12	-5,10	12,00
PC-sym	0,50	2,26	-3,20	-4,13	12,11

Źródło: obliczenia własne.

Symulacja stochastyczna pozwoliła na potraktowanie optymalnych składów portfeli jako wyników losowych. W tabeli 5 zaprezentowano wyniki charakteryzujące wrażliwość optymalnych rozwiązań modeli portfelowych: wartości przeciętnych odległości kątowych między wektorami optymalnych wag, wartości median oraz odchyłeń standardowych. Najbardziej wrażliwe okazały się optymalne wagi w przypadku modelu CVaR1 – przeciętna odległość kątowa wynosiła 0,7531. Najmniejsze odległości kątowe, a więc największą stabilność elementów wektora optymalnych wag, zanotowano w przypadku modelu Telsera. Porównanie wartości średnich oraz median dla odległości kątowych wag wskazuje we wszystkich przypadkach poza modelem PC na prawostronną skośność rozkładów optymalnych wag.

Tabela 5

Odległości kątowe składów portfeli w symulacjach

	Markowitz	CVaR1	CVaR_N	Telser	PC
Średnia	0,5742	0,7531	0,5701	0,4034	0,5116
Mediana	0,5187	0,7067	0,5255	0,2821	0,5150
Odchylenie standardowe	0,1171	0,1002	0,1066	0,2775	0,1376

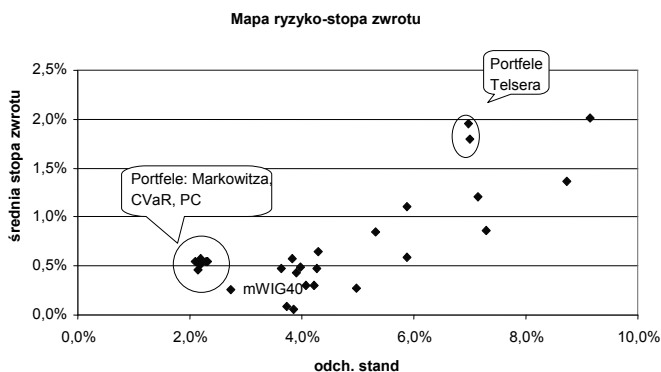
Źródło: obliczenia własne.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono wyniki badania symulacyjnego, którego założenia oparto na empirycznych stopach zwrotu dla średnich spółek notowanych na polskim rynku giełdowym. Próbowano odpowiedzieć na pytanie: jak silnie zareagują wektory optymalnych wag portfeli, jeżeli stopy zwrotu będą generowane z wielo-

wymiarowego rozkładu normalnego o parametrach oszacowanych na podstawie próby historycznej. Nie badano reakcji wag na zmiany wartości średniej stopy zwrotu dla żadnej ze spółek ani na zmiany elementów macierzy kowariancji. Obserwowana zmienność optymalnych wag była wynikiem jedynie losowego charakteru generowanych prób.

Modelem charakteryzującym się największą wrażliwością rozwiązań okazał się model minimalizujący CVaR, zwłaszcza jeżeli do szacowania VaR stosowano, abstrahując od kształtu rozkładu stóp zwrotu, metodę symulacji historycznej. W przypadku szacowania VaR jako kwantyla rozkładu normalnego (oczywiście, gdy można przyjąć, że rozkład empiryczny wykazuje zgodność z tym rozkładem) wrażliwość rozwiązań modelu CVaR i modelu Markowitza jest podobna. Portfel Telsera okazał się najbardziej stabilny, jeśli chodzi o skład, ale jednocześnie najbardziej ryzykowny. Rozwiązania modelu PC opartego na analizie głównych składowych były bardziej stabilne niż modelu Markowitza. Ogólnie wszystkie modele wykazały wysoką wrażliwość wag optymalnych. Przyglądając się osiągniętym realnym stopom zwrotu, można wyróżnić portfel PC jako najbardziej zyskowy. Wbrew szacunkom opartym na danych historycznych portfel Telsera przyniósł najmniejsze zyski realne. Na rysunku 3 zilustrowano wyznaczone portfele na mapie ryzyko–stopa zwrotu. Widać na niej, że przy przyjętych założeniach portfele Markowitza, CVaR i PC dają zbliżone wyniki średnich i odchyleń standardowych.



Rysunek 3. Mapa ryzyko–stopa zwrotu dla akcji i portfeli akcji

Źródło: obliczenia własne.

Literatura

- Best M.J., Grauer R.R. [1991], *On Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results*, „The Review of Financial Studies”, Vol. 4, No. 2, 315–342.
- Chopra V.K., Ziemba W.T. [1993], *The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice*, „Journal of Portfolio Management”, Vol. 19, 2, 6–11.
- Golub G.H., Reinsch C. [1971], *Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions*, in: J.H. Wilkinson, C. Reinsch [eds.] *Linear Algebra*, Springer-Verlag, Berlin.
- Konarzewska I. [2008], *On measuring the sensitivity of the optimal portfolio allocation*, „Badania Operacyjne i Decyzje”, 2, 55–75.
- Konarzewska I. [2012], *Niepewność i ryzyko rynkowe inwestycji w akcje. Studium metodologiczno-empiryczne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Lintner J. [1965], *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*, „Review of Economics and Statistics”, 47, 13–37.
- Markowitz H. [1952], *Portfolio Selection*, „Journal of Finance”, 7, 77–91.
- Sharpe W. [1964], *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, „Journal of Finance”, 19, 425–442.
- www.stooq.pl

STOCHASTIC SIMULATION OPTIMAL PORTFOLIOS STRUCTURES SENSITIVITY ANALYSIS BY STOCHASTIC SIMULATION

Summary

The paper presents the application of stochastic simulation technique in the analysis of sensitivity of optimal weights for chosen portfolio models. Risk is related to several elements of investment decision process: assumptions about joint probability distribution of the rates of return on stock, quality of expected rates of return, risk and correlation estimates, the choice of the optimization model criterion and constraints.

The subject of analysis are the optimal stock portfolios for companies being the components of mWIG40 index on Warsaw Stock Exchange in the period 2009–2011 – we analyzed weekly rates of return. The simulation study was conducted in the aim of the optimal portfolio structures sensitivity investigation. The following models were taken

into account: Markowitz model, the model minimizing conditional loss (CVaR), Telser model and the proposed model minimizing the impact of the correlation matrix first principal component on the portfolio variance. Rates of return were generated with the application of the method which preserves the structure and strength of the interrelationships among the series. The method is based on the correlation matrix eigenvalue decomposition. Conducted simulation experiments allow us to recommend the choice of definite portfolio model to investors.

Keywords: stochastic simulation, sensitivity, portfolio analysis

Translated by Iwona Konarzewska