ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU SZCZECIŃSKIEGO

NR 690 FINANSE, RYNKI FINANSOWE, UBEZPIECZENIA NR 51 2012

JERZY TYMIŃSKI

TEORETYCZNE I PRAKTYCZNE ASPEKTY KONCEPCJI WARTOŚCI ZAGROŻONEJ[1]

Wprowadzenie

W działalności podmiotu gospodarczego występuje ryzyko, niekiedy tak głębokie, że zagraża jego egzystencji. Ryzyka nie da się całkowicie wyeliminować, jednak jest możliwe jego kwantyfikowanie, analiza, a tym samym kontrola i zarządzanie ryzykiem.

Celem zarządzania ryzykiem jest przede wszystkim ochrona podmiotu przed niekontrolowanym poziomem strat. Dynamika i zakres zmian w globalnej gospodarce skutkują wzrostem ryzyka we wszystkich obszarach decyzyjnych przedsiębiorstwa. Szczególnie dużą rolę odgrywa ryzyko w sferze finansowej.

Poznanie charakteru i zakresu ryzyka pozwala na podejmowanie optymalnych decyzji i działań zapobiegawczych. Zmierzają one do obniżenia skali ryzyka w funkcjonowaniu podmiotu gospodarczego. Skuteczność decyzji ograniczających skalę ryzyka może być zróżnicowana i zależna od sposobu jego kwantyfikacji i oceny. Kluczowym problemem jest wybór właściwej metody szacowania *VaR*.

VaR (*Value at Risk*) jest uniwersalną miarą ryzyka, zwaną też wartością ryzykowną. Ze względu na właściwości interpretacyjne może być wykorzystana do pomiaru różnych rodzajów ryzyka, tj. rynkowego, operacyjnego, kredytowego, a także ryzyka inwestycji czy stopy procentowej. Umożliwia wyrażanie w sposób jednolity ryzyka różnych kategorii występujących na rynku finansowym.

Celem artykułu jest prezentacja wybranych procedur szacowania ryzyka miarą *VaR* w zarządzaniu portfelem inwestycyjnym na rynku kapitałowym.

Sposób kalkulacji *VaR*

Wartość zagrożona w odniesieniu do portfela na rynku kapitałowym czy instrumentu finansowego, jest to taka strata jego wartości rynkowej, że prawdopodobieństwo jej osiągnięcia lub przekroczenia w zadanym okresie równe jest przyjętemu poziomowi tolerancji α. Zazwyczaj przyjmuje się $\alpha \in \langle 0{,}01;0{,}05] \rangle$, przy czym im jest on niższy, tym wyższa jest wartość ryzykowna.

---

[1] *Zarządzanie ryzykiem*, red. K. Jajuga, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009, s. 99.

Kalkulacja *Value at Risk* obejmuje:
- gromadzenie informacji dotyczących obecnych pozycji na wszystkich rachunkach,
- obserwację wahań cen tych pozycji w ciągu określonego czasu w przeszłości (np. 360 dni) i określenie ich zmienności,
- ustalenie poziomu ufności, który zostanie przyjęty do dalszej oceny,
- przeprowadzenie kalkulacji *VaR*.

Wartość *VaR* określana jest za pomocą kwantyla rozkładu stopy zwrotu, bądź też w przypadku rozkładu normalnego poprzez odchylenie standardowe rozkładu. Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na trudność szacowania kwantyla rozkładu. Stosowane tutaj są metody:
- wariancji-kowariancji,
- symulacji historycznej,
- symulacji Monte Carlo.

K. Jajuga[2] podaje też inne metody oparte na wyznaczeniu dowolnego kwantyla rozkładu, a także na teorii wartości ekstremalnych oraz wykorzystaniu wartości z ogona rozkładu.

Metoda wariancji-kowariancji (*variance-covariance method*)

Jest to metoda stosunkowo prosta. Istotne jest przyjęcie założenia co do rozkładu stopy zwrotu. Zakłada się rozkład normalny. Oczekiwaną stopę zwrotu oraz odchylenie standardowe ustala się na podstawie danych historycznych. W tych przypadkach zastosowanie mają formuły:

$$Var = (c\sigma_R - E(R))\, W_0 \tag{1}$$

bądź (dla przyjętej zerowej wartości oczekiwanej)

$$VaR = c\sigma_R\, W_0,$$

gdzie:

c – stała określająca poziom ufności,
σ_R – odchylenie standardowe stopy zwrotu,
$E(R)$ – wartość oczekiwana stopy zwrotu,
W_0 – wartość zmiennej początkowego okresu badanego.

Stąd kwantyl jest funkcją średniej i odchylenia standardowego rozkładu stóp zwrotu:

$$R_\alpha = \mu - c\sigma \tag{2}$$

gdzie:

μ – średnia rozkładu,

[2] *Ibidem*, s. 60.

σ – odchylenie standardowe,

c – stała zależna od prawdopodobieństwa, np. gdy $1 - \alpha = 0{,}95$, to $c = 1{,}65$, gdy $1 - \alpha = 0{,}99$, to $c = 2{,}33$.

Z formuły (1) oraz (2) wynika, że:

$$VaR = (c\sigma - \mu)\, W_0,$$

zaś wartości μ i σ można wyznaczyć z zależności[3]:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} w_i p_i \tag{3}$$

oraz

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_1\, w_j\, \sigma_{ij} \tag{4}$$

gdzie: w_i oznacza udział i-tego składnika portfela, zaś μ i σ są określone wektorem i macierzą:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \quad \sum = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie: n – jest liczbą składników portfela.

Metodę wariancji-kowariancji należy stosować z dużą ostrożnością, gdyż rozkłady stóp zwrotu (R) nie zawsze mają rozkład normalny.

Przykład 1.

Chcemy wyznaczyć tygodniowy *Value at Risk* dla portfela składającego się z dwóch akcji A i B o aktualnym kursie stopy zwrotu odpowiednio 15 zł i 10 zł. Kapitał zakupowy portfela wyniósł 1000 zł, w proporcji: 60% akcje A, 40% – B. Tygodniowe stopy zwrotu wyrażające relatywne przyrosty kursów A i B, wynoszą R_A *i* R_B. Załóżmy, że rozkład tygodniowych stóp zwrotu kursów akcji jest rozkładem normalnym o parametrach: $E(R_1) = 0$, $E(R_2) = 0$, $\sigma_1 = 0{,}02$, $\sigma_2 = 0{,}03$, $p = 0{,}6$.

a) Oznaczając przez SR stratę, jaka może mieć miejsce przy zaistniałej różnicy wartości aktualnej portfela oraz w okresie tygodniowym (następnym) mamy:

$$SR = -(15 \times 0{,}6 \times 1000 \times R_A + 10 \times 0{,}4 \times 1000) = -(9000 \times R_A + 4000 \times R_B).$$

[3] J. Gwizdała: *Metoda szacowania VaR w zarządzaniu ryzykiem banku*, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2011, s. 672.

Z założenia *SR* ma rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji

$$\sigma_p^2\,(SR) = X_A^2\,\sigma_A^2 + X_B^2\,\sigma_B^2 + 2X_A X_B \sigma_A\,\sigma_B\,p,$$

gdzie: *X* – udział wartościowy kapitału zakupowego, więc

$$\sigma_p^2\,(SR) = 9000 \times 0{,}02 + 4000 \times 0{,}03 + 2 \times 9000 \times 4000 \times 0{,}02 \times 0{,}03 \times 0{,}6 = 72720.$$

Odchylenie standardowe portfela wyniesie:

$$\sigma_p(SR) = \sqrt{72\,720} = 270.$$

Kwantyl rozkładu normalnego, dla 0,95 poziomu ufności, jest w przybliżeniu równy 1,65 więc:

$$VaR(SR) = 270 \times 1{,}65 = 445{,}5 \text{ zł}.$$

Zatem wartość *Value at Risk*, dla poziomu ufności 0,95 wynosi 445,5 zł.

Metoda symulacji historycznej (*historical simulation metod*)

Metoda ta sprowadza się do wykorzystania stóp zwrotu instrumentu finansowego (np. portfela akcji) w ujęciu historycznym. Najczęściej przyjmuje się dzienne historyczne stopy zwrotu.

Wykorzystanie tej metody jest uwarunkowane tym, na ile historyczne stopy zwrotu pozwalają określić empiryczny rozkład. Umożliwia to oszacowanie kwantyla rozkładu i wyznaczenie wartości ryzykownej. Skuteczność symulacji historycznej jest uwarunkowana niezmiennością stóp zwrotu. Stąd korzysta się z *n* obserwacji objętych badaniem według formuły:

$$R_t = \sum\nolimits_{i=1}^{n} w_i R_{it} \tag{5}$$

W oparciu o (5) zostaje wygenerowany rozkład statystyczny stóp zwrotu. Wyznaczenie kwantyla tego rozkładu określa wartość VaR na mocy formuły:

$$P(R \le R_\alpha) = \alpha.$$

Warto zauważyć, że jest to procedura nieparametryczna, stąd też nie ma tutaj ograniczeń wynikających z założeń normalności rozkładu *R,* co należy uznać jako zaletę metody. Zbyteczne jest także szacowanie parametrów: średniej i odchylenia standardowego, w oparciu o obserwacje historyczne.

Metoda symulacji Monte Carlo (*Monte Carlo simulation*)

MSMC jest metodą najbardziej złożoną numerycznie. Wymaga wieloetapowego podejścia. W pierwszej kolejności konstruuje się hipotetyczny model odzwierciedlający kształtowanie się stóp zwrotu. Podstawą modelu jest wiedza teoretyczna, bądź empiryczna, obejmująca wiele (nawet kilka tysięcy) doświadczeń z przeszłości o rozważanych stopach zwrotu. Często wykorzystuje się tutaj model odzwierciedlający geometryczny ruch Browna.

$$R = \mu + \sigma^{\varepsilon} \tag{6}$$

gdzie:

μ – parametr modelu zwany dryfem,
σ – parametr określający zmienność R,
ε – zmienna losowa o standaryzowanym rozkładzie normalnym.

W oparciu o przyjęty model generuje się wartości stóp zwrotu celem oszacowania ich empirycznego rozkładu. Umożliwia to m.in. określenie kwantyla tego rozkładu i pozwala określić wartość zagrożoną *VaR*, przy przyjętym poziomie istotności.

Formalnie wielkość wartości ryzykowanej jest określona następującym wzorem:

$$P(W \leq W_0 - VaR) = \alpha \tag{7}$$

lub

$$P(W > W_0 - VaR) = 1 - \alpha \tag{8}$$

gdzie:

VaR – wartość zagrożona w rozpatrywanym okresie,
P – prawdopodobieństwo zajścia następnego zdarzenia,
W_0 – wartość zmiennej na początku okresu (wartość pojedynczego instrumentu finansowego lub portfela),
W – wartość zmiennej na koniec okresu (wartość pojedynczego instrumentu finansowego portfela),
α – poziom tolerancji.

Zależność (7) oznacza, że z prawdopodobieństwem równym przyjętemu poziomowi tolerancji, wartość W na koniec okresu będzie równa co najwyżej wartości obecnej W_0 pomniejszonej o *VaR*.

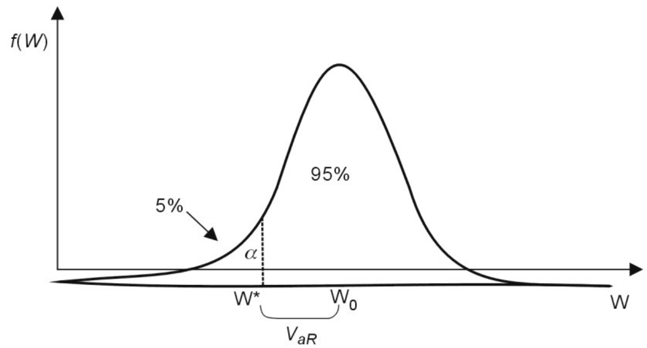
Rysunek 1 przedstawia ilustrację wartości zagrożonej. Na osi odciętych zaznaczone są wartości zmiennej na zakończenie rozpatrywanego okresu, oś rzędnych przedstawia wartości funkcji gęstości zmiennej W. Przez W^* oznaczono najniższą wartość zmiennej, zwaną też *kwantylem rozkładu*, która dzieli powierzchnię pola, znajdującą się pod wykresem $f(W)$ na dwie części, odpowiadające przyjętemu (w tym przypadku 5%) poziomowi tolerancji.

Wartość *VaR*, określająca wolumen straty, jest różnicą pomiędzy obecną wartością zmiennej W_0 a kwantylem rozkładu[4] W^*. Przy horyzoncie czasowym jednego miesiąca, *Va-*

---

[4] Kwantylem rzędu p, $p \in \langle 0;1 \rangle$ w rozkładzie empirycznym P_X zmiennej losowej X, nazywamy każdą liczbę x_p, dla której $P_x((-\infty, x_p)) \geq p$ oraz $P_x((x_p + \infty)) \geq 1 - p$.

lue at Risk oznacza maksymalne zmniejszenie wartości zmiennej *W*, jakie może nastąpić w ciągu 30 dni, na poziomie tolerancji 5%. Innymi słowy, straty większe od wartości *VaR* powinny występować nie częściej niż w 5% przypadków w ciągu jednego miesiąca.



Rysunek 1. Ilustracja wartości zagrożonej

Źródło: opracowanie własne w oparciu o *Zarządzanie ryzykiem*, red. K. Jajuga, Wydawnictwo Naukowe PWN 2009, s. 100.

W zależności od metody kalkulacji, wartość ryzykowana może zostać zapisana w odmienny sposób. Jedna z tych metod wykorzystuje rzeczywisty rozkład stóp zwrotu, z którego bezpośrednio odczytywana jest *Value at Risk*, druga opiera się na upraszczającym założeniu, że rozkład stóp zwrotu jest normalny. Bez względu na metodę, *Value at Risk* – miarę straty można wyrazić jako wartość absolutną lub jako jej procentową wielkość w stosunku do wartości bazowej, bądź w odniesieniu do wartości średniej portfela.

Jeżeli wyznaczymy *VaR* jako wartość absolutną, przyjmuje się, że w ustalonym czasie:

$$VaR = W_0 - W^* \tag{9}$$

gdzie:

W_0 – wartość zmiennej na początku ustalonego czasu,

W^* – wartość zmiennej na końcu ustalonego czasu.

W^* jest więc mniejszą stopą zwrotu równoznaczną wartości zagrożonej.

W metodzie tej zakłada się pewien hipotetyczny model opisujący najlepiej mechanizm kształtowania się stóp zwrotu. Zaleca się, by model ten został wcześniej zweryfikowany na wielu obserwacjach empirycznych.

Zastosowanie metody Monte Carlo do wyznaczania wartości *VaR* można zilustrować przykładem. Należy więc:

1° przyjąć model opisujący mechanizm kształtowania się stóp zwrotu;

2° generować kilka tysięcy obserwacji stóp zwrotu.

Pozwala to określić rozkład stopy zwrotu, następnie wyznaczyć kwantyl przyjętego rzędu i wartość *VaR*.

Przykład 2.

Dany jest instrument finansowy, którego stopy zwrotu są losowe opisane modelem:

$$\frac{W_{t+1} - W_t}{W_t} = \mu + \sigma\,\varepsilon, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

gdzie:

W_t – wartość instrumentu w okresie t,

ε – zmienna losowa o rozkładzie normalnym $N(0,1)$,

μ, σ – odpowiednio: wartością oczekiwaną i odchyleniem standardowym dla stóp zwrotu.

Dla parametrów μ, σ, przyjęto wartość średnią i odchylenie standardowe tygodniowych stóp zwrotu dla WIG20 za okres 03. I. 2000–07. I. 2010, μ = 0,002079($^{\cong 0{,}002}$) i σ= 0,031387 ($^{\cong 0{,}031}$). Przyjmując, że początkowa wartość instrumentu wynosi 1000 zł, wyznaczamy skończone T – elementowe ciągi wartości:

$$\begin{gathered} W_{t+1}^{(f)} = W_t^{(f)}(1 + 0{,}002 + 0{,}031 \times \varepsilon), t = 0, 1, 2, \ldots, T-1 \\ W_0 = 1000 \end{gathered} \tag{10}$$

gdzie: symbol (j) oznacza numer losowanej próby (przyjęto, że j = 1, 2, ..., 10 000).

W ten sposób otrzymujemy ciąg wartości empirycznych instrumentu po T okresach: $W_T^{(1)}$, $W_T^{(2)}$, ..., $W_T^{(10000)}$, na podstawie którego wyznaczamy kwantyle rzędu α czyli W_α dla α = 0,10; 0,05; 0,01. W eksperymencie Monte Carlo przyjęto następujące długości okresów: T = 6 tygodni, 13 tygodni, 26 tygodni, 52 tygodnie. W celu zachowania porównywalności wyników losowania przyjęto dla prób taki sam start generatora liczb pseudolosowych. Otrzymane rezultaty zamieszczono w tabeli 1.

Liczba c_α jest wyznaczona z tablic statystycznych dla zmiennej losowej $X \sim N(0,1)$ tak, aby $P(X \leq -C_\alpha)$, czyli z symetrii rozkładu normalnego będzie $P(X \geq C_\alpha) = \alpha$.

Łatwo zauważyć, że wraz ze wzrostem poziomu tolerancji α rosną wartości kwantyla W_α, a tym samym maleją bezwzględne wartości *VaR*. Dla ustalonego poziomu tolerancji α wraz ze wzrostem długości hipotetycznych okresów zwrotu maleją wartości kwantyla W_α zatem wartości bezwzględne *VaR* rosną.

Warto zwrócić uwagę, że wartości teoretyczne VaR_c, wyznaczone przy założeniu rozkładu normalnego dla stóp zwrotu odpowiadają sytuacji, gdy okres zwrotu jest jednotygodniowy (T = 1). Występujące różnice między VaR_c a VaR_α (dla T = 1) wynikają z ograniczonej liczby losowanych prób (tylko 10 000).

Tabela 1

Wyniki symulacji Monte Carlo wartości zagrożonej VaR_{α}

T	Wartości	Wartości kwantyli W_{α} i wartości zagrożonej VaR_{α} dla		
		$\alpha = 0{,}10$	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$
Wartości teoretyczne	c_{α}	1,2816	1,6449	2,3263
	$VaR_c = (-m+c_{\alpha}s)W_0$	37,7296	48,9919	70,1153
1	W_{α}	963,076	951,275	928,878
	VaR_{α}	36,924	48,725	71,122
6	W_{α}	915,413	889,915	845,287
	VaR_{α}	94,587	110,085	154,713
13	W_{α}	881,547	846,854	786,166
	VaR_{α}	118,453	153,146	213,834
26	W_{α}	847,904	798,566	719,616
	VaR_{α}	152,096	201,434	280,384
52	W_{α}	811,487	746,387	651,126
	VaR_{α}	188,513	253,613	348,874

Źródło: obliczenia własne w pakiecie *Mathematica*.

Na rysunku 2 przedstawiono schemat blokowy metody symulacji Monte Carlo.

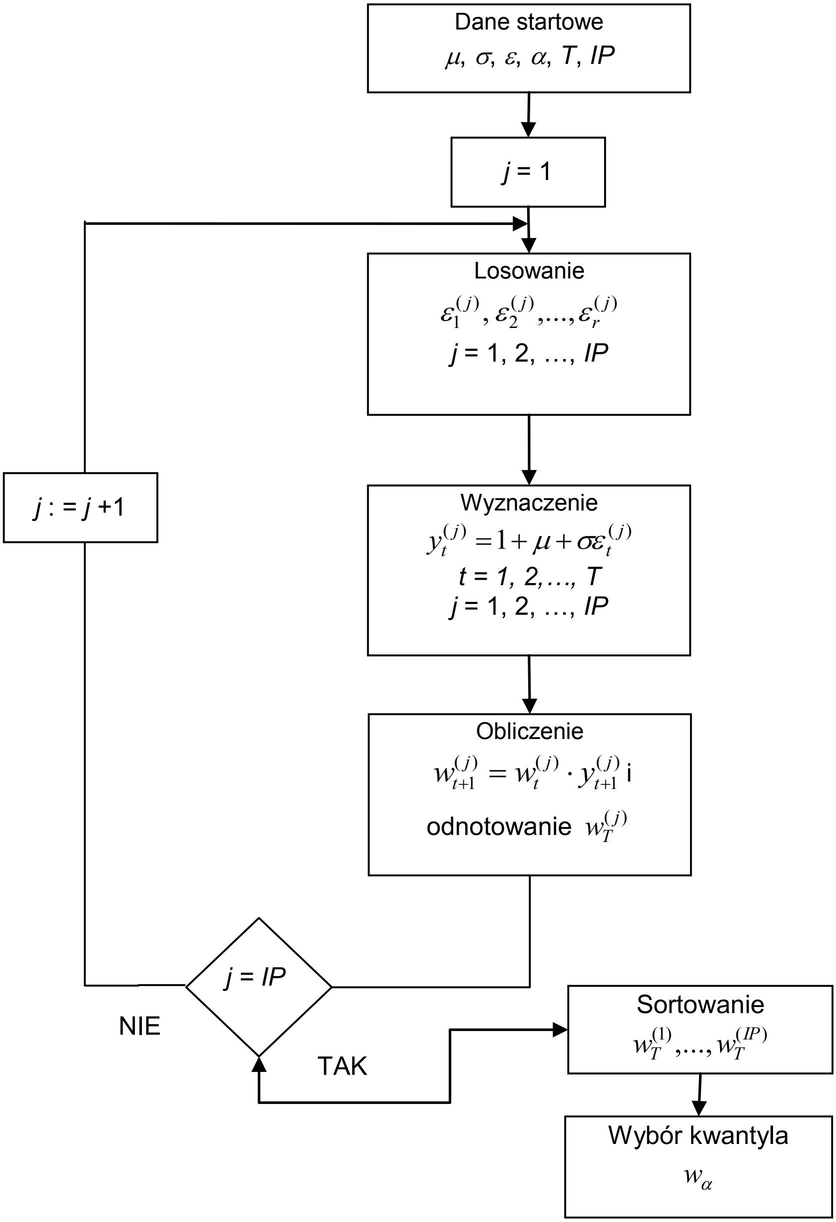
Rozkład stopy zwrotu instrumentu finansowego (bądź portfela) w zadanym czasie przedstawiono na rysunku 3. Zakreślony obszar odpowiada prawdopodobieństwu na poziomie α i oznacza, że wartości stopy zwrotu instrumentu finansowego nie znajdą się poza kwantylem rozkładu stopy zwrotu R^* z prawdopodobieństwem α. Można zatem zapisać przedział ufności dla $E(R)$ postaci:

$$P\{E(R) - Z_{\alpha}\sigma_R \leq E(R) \leq E(R) + Z_{\alpha}\sigma_R\} = 1 - \alpha \tag{11}$$

gdzie:

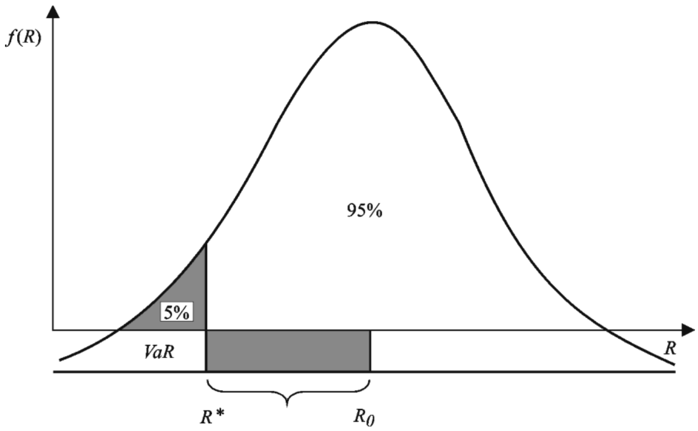
$E(R)$ – wartość oczekiwana stopy zwrotu,
Z_{α} – wartość z tablic rozkładu $N(0,1)$,
σ_R – odchylenie standardowe stopy zwrotu R,
α – poziom tolerancji.

Model *VaR* zakłada szacowanie maksymalnej straty przy założonym poziomie prawdopodobieństwa. Stąd, rozpatruje się wyłącznie negatywne zmiany wartości bieżącej (W), przy których kwantyl rozkładu stopy zwrotu jest ujemny (czyli wartość narażona na ryzyko jest wielkością dodatnią), co ilustruje rysunek 3.



Rysunek 2. Schemat blokowy metody Monte Carlo

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 3. Wartość zagrożona

Źródło: opracowanie własne na podstawie *Zarządzanie ryzykiem*, *op. cit.*, s.100.

Na rysunku 3 zilustrowano wartość straty (*VaR*), która jest różnicą pomiędzy obecną wartością (R_0) zmiennej R a kwantylem rozkładu. sytuacji rozpatrywanej w przykładzie 1 horyzont czasu wynosi tydzień. W tym przypadku *VaR* oznacza maksymalne zmniejszenie wartości zmiennej, jakie może nastąpić na przyjętym poziomie ufności ($1 - \alpha$) w ciągu tygodnia. A zatem straty wyższe niż obliczona wartość *VaR* (w przykładzie wyższe niż 445,5 zł) mogą wystąpić nie częściej, niż w 5 przypadkach na 100.

Podsumowanie

Metoda wartości zagrożonej umożliwia syntetyczny pomiar ryzyka danej instytucji finansowej. Pozwala określić, z przyjętym prawdopodobieństwem, maksymalny poziom straty, jaką może ponieść inwestor w danym horyzoncie czasowym. Dzięki niej można prześledzić zmiany ryzyka, wiążącego się ze składowymi elementami portfela. Techniki te pozwalają ocenić dywersyfikację portfela i adekwatność kapitałową oraz dokonać korekt efektywności działania o czynnik ponoszonego ryzyka, zarówno na poziomie całej instytucji, jak i jej poszczególnych działów.

Miara *VaR* zastosowana do oceny ryzyka rozpatrywanego przedsięwzięcia gospodarczego jest użyteczna. Jednakże kalkulacja wartości *VaR* wymaga uwzględnienia kwantyla rozkładu, co może być traktowane jako wada metodologiczna.

Wydaje się, że metodą kalkulacji eliminującą tę wadę może być metoda Monte Carlo.

Literatura

Best P.: *Wartość narażona na ryzyko. Obliczanie i wdrażanie modelu VaR*, Oficyna Wydawnicza ABC, Kraków 2000.

Gwizdała J.: *Metoda szacowania VaR w zarządzaniu ryzykiem banku*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2011.

Jaworski P., Micał J.: *Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*, Wydawnictwo POLTEXT, Warszawa 2005.

Podstawy procesów decyzyjnych na rynku kapitałowym, red. J. Tymiński, Wyd. WSGK, Kutno 2011.

Zarządzanie ryzykiem, red. K. Jajuga, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.

dr Jerzy Tymiński, prof. WSGK w Kutnie
Wyższa Szkoła Gospodarki Krajowej w Kutnie
Wydział Zarządzania

Streszczenie

W artykule przedstawiono wybrane metody szacowania ryzyka *VaR*. Koncepcje teoretyczne wyceny *VaR* poparto praktycznymi przykładami z rynku kapitałowego. Szczególnie przydatną jest metoda Monte Carlo. Zaprezentowano schemat blokowy etapowego sposobu postępowania w szacowaniu *VaR* metodą Monte Carlo. Metoda ta charakteryzuje się wysoką dokładnością, a jej uniwersalność powoduje szerokie możliwości stosowania.

THEORETICAL AND PRACTICAL ASPECTS OF THE VALUE-AT-RISK CONCEPT

Summary

The article presents methods used to estimate VaR. The theoretical concepts of VaR estimation are illustrated by practical examples from the capital market. Among the concepts the Monte Carlo method is particularly useful. A block diagram presenting the stages in estimating VaR with the method has been built. The Monte Carlo method is very precise as well as universal, because it can be applied also to cases where other methods cannot be used.